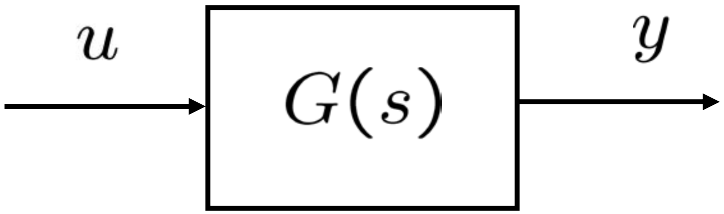
Progetto del controllore

Il caso dei sistemi LTI a tempo continuo

- Esempio 3 (instabile in anello aperto)

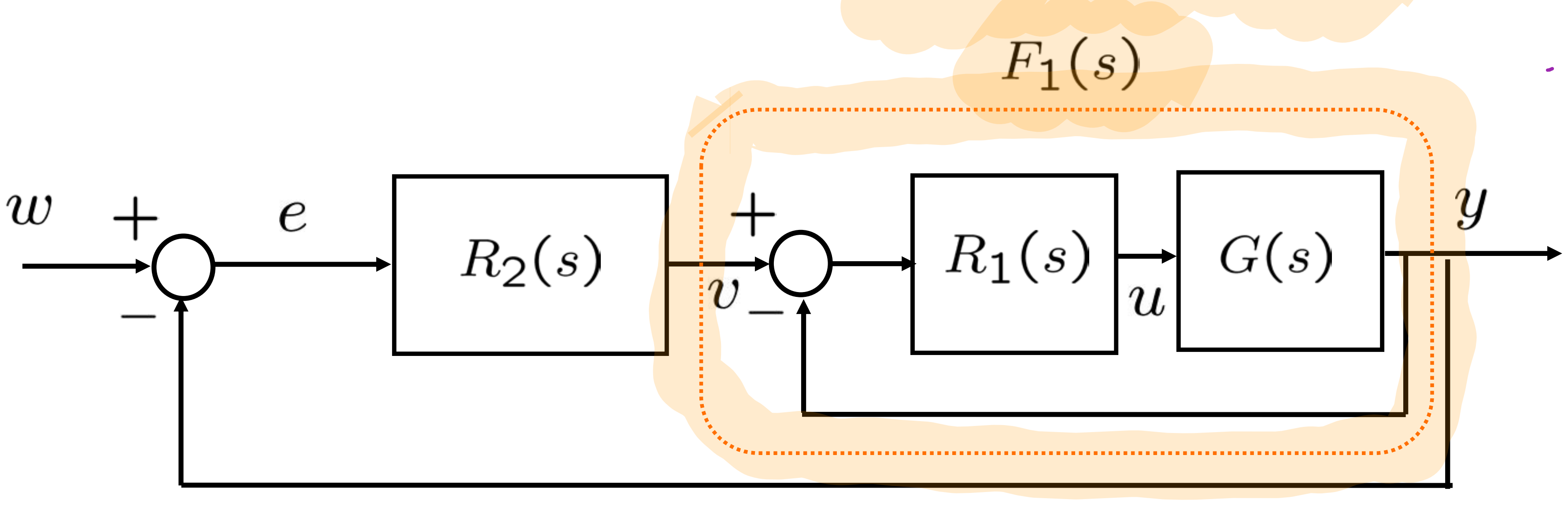


$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ con $w(t) = A \cdot 1(t)$
- $\omega_c \geq 0.5$
- $\varphi_m \geq 45^\circ$

La via piu` semplice e` utilizzare il cosiddetto schema a doppio anello:



$R_1(s)$ ha il compito di stabilizzare il sistema da controllare

$R_2(s)$ ha il compito di far si` che le specifiche di progetto siano soddisfatte

Il progetto di $R_1(s)$ puo` essere condotto semplicemente cosi`:

$$R_1(s) = \mu_1 \quad \Rightarrow \quad L_1(s) = \frac{\mu_1}{s-1}$$

$$\hat{R}_1 = \frac{\mu_1}{1+\frac{1}{100}s}$$

$$F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1+L_1(s)} = \frac{\mu_1}{s-1+\mu_1}$$

$$\mu_1 > 1$$

Scegliendo per esempio $\mu_1 = 11$ si otterrebbe $F_1(s) = \dfrac{1.1}{1+0.1s}$

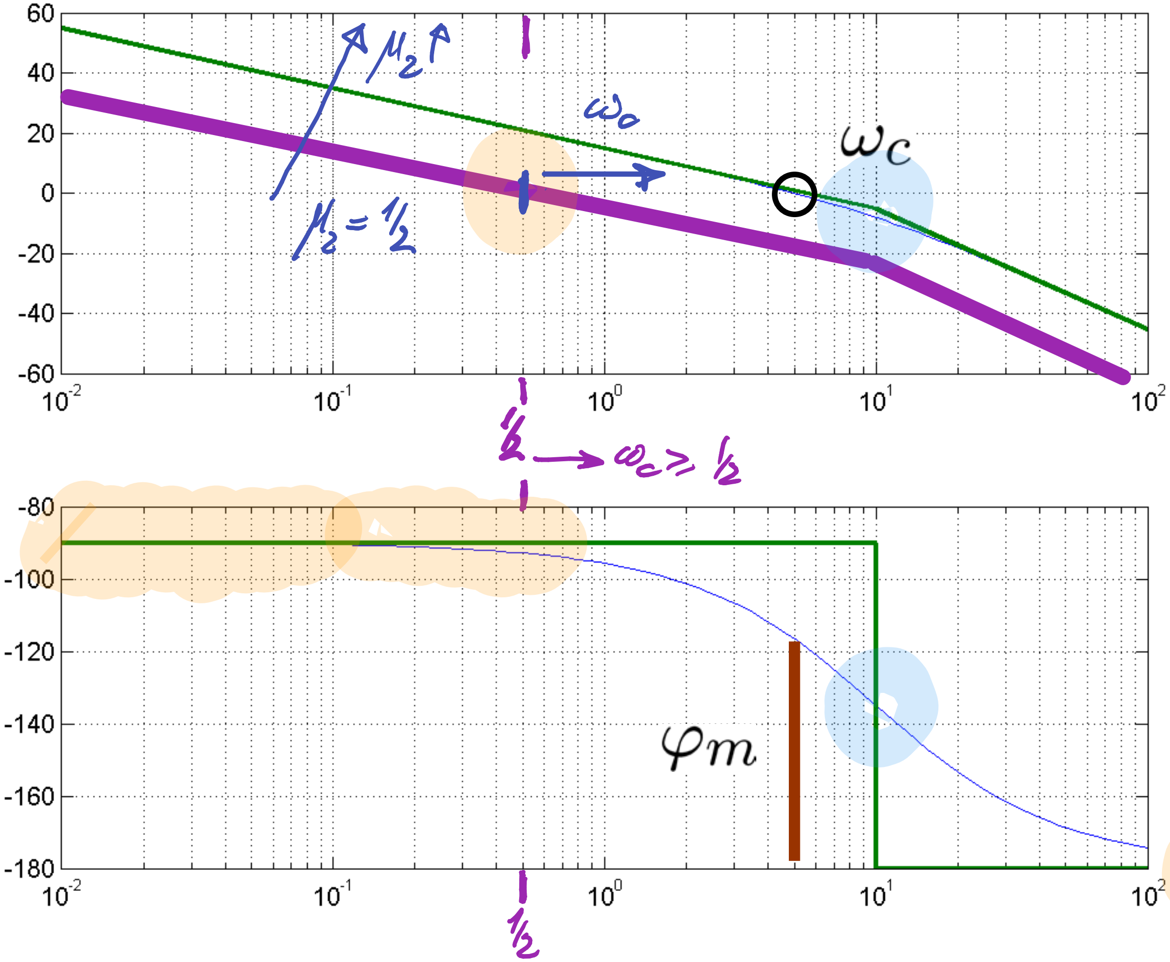
$$\hat{\mu}_1 = 51$$

$$\hat{F}_1(s) = \frac{51/50}{1+\frac{1}{50}s}$$

Il progetto di $R_2(s)$ e` ora molto semplice. Per esempio

$$R_2(s) = \frac{5}{s} \qquad \frac{\mu_2}{s}$$

$$L_1(s) = \frac{5.5}{s(1+0.1s)} \qquad \mu_2$$



- $|e(\infty)| = 0$
- $\omega_c \simeq 5.5$
- $\varphi_m \simeq 61°$

$\measuredangle L(j5{,}5) \simeq -115°$

Progetto di regolatori standard

~~Reti correttrici~~

Regolatori PID (Cenni)

Strutture dei regolatori standard

- ~~Reti correttrici~~
  - ~~Rete anticipatrice~~
  - ~~Rete ritardatrice~~
  - ~~Rete a sella~~
- Regolatori PID (**breve cenno; esempi in Esercitazioni**)

Regolatori PID

- Regolatori con azione di controllo
  - proporzionale
  - integrale
  - derivativa

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\textbf{PID}} \longrightarrow u(t)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)\, d\tau + T_d\, \dot{e}(t) \right] \\ &= K_p\, e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau + K_d\, \dot{e}(t) \end{aligned}$$

Parametri dei PID

- coefficienti dell'azione P, I, D $\quad K_p, \quad K_i, \quad K_d$

- (costante di) tempo dell'azione I, D $\quad T_i, \quad T_d$

- 1.o legame tra i parametri

$$T_i = \frac{K_p}{K_i}, \qquad T_d = \frac{K_d}{K_p}$$

Schema a blocchi di un PID ideale

- Forma standard

$$R(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{s\,T_i} + s\,T_d \right]$$

- Forma "interagente"

$$R(s) = K_p' \left(1 + \frac{1}{s\,T_i'} \right) \left(1 + s\,T_d' \right)$$

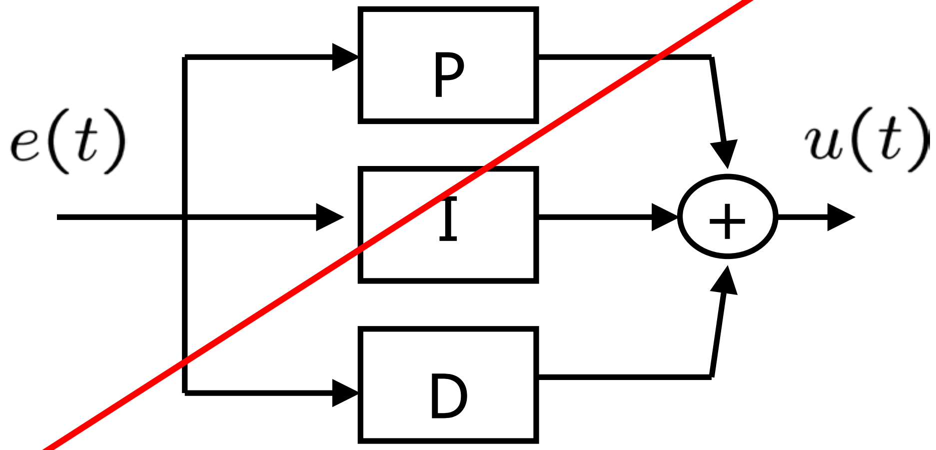
- Forma "in parallelo"

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + s\,K_d$$

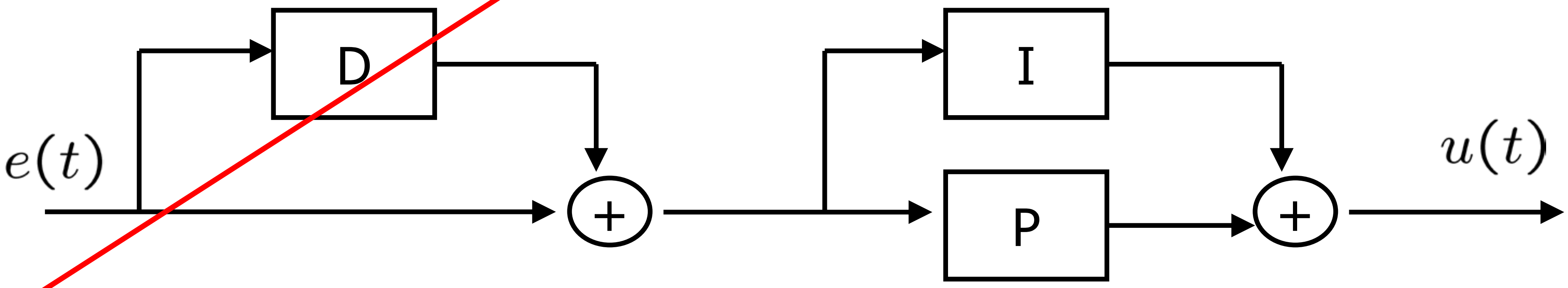
È PID ideale perchè la **fdt non è propria** (2 zeri/1 polo).

Schema a blocchi di un PID ideale (2)

- Forma non interagente



- Forma interagente



Legami tra i parametri

- Standard vs parallela $T_i = \dfrac{K_p}{K_i}, \quad T_d = \dfrac{K_d}{K_p}$

- Da interagente a non interagente

$$
\begin{aligned}
K_p &= K_p^{'} \frac{T_i^{'} + T_d^{'}}{T_i^{'}} \\
T_i &= T_i^{'} + T_d^{'} \\
T_d &= \frac{T_i^{'} T_d^{'}}{T_i^{'} + T_d^{'}}
\end{aligned}
$$

- Da non interagente ad interagente

$$T_i \geq T_d$$

$$K_p^{'} = \frac{K_p}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_i^{'} = \frac{T_i}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

$$T_d^{'} = \frac{T_i}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\,T_d}{T_i}}\right)$$

Perchè 3 strutture?

- La forma non interagente (e quindi anche quella parallela) è più generale di quella interagente.
- La forma interagente è stata storicamente la prima a venire utilizzata (regolatori pneumatici) e secondi molti testi è la più semplice da tarare manualmente.
- In effetti $T_i^{'}$ e $T_d^{'}$ esprimono direttamente le costanti di tempo degli zeri della fdt in forma interagente.

Osservazioni: valori ammissibili dei parametri

- ~~Qualsiasi sia la forma scelta per~~ il PID ideale~~, esso~~ ha una fdt con 2 zeri ed 1 polo.
- In particolare **il polo è fisso** nell'origine, gli **zeri sono funzione dei parametri**.
- Esistono allora dei **vincoli** per i parametri? **SI!**
  - Gli **zeri** del regolatore devono essere **a parte reale negativa**, cioè il **regolatore** PID deve avere una fdt **a fase minima**!
- ~~Questa richiesta vincola i parametri che compaiono nella fdt del PID~~.

- Forma interagente ⇒ zeri reali negativi

$$R(s) \;=\; K_p^{'}\left(\frac{1+s\,T_i^{'}}{s\,T_i^{'}}\right)\left(1+s\,T_d^{'}\right)$$

$$K_p^{'} \;>\; 0$$
$$T_i^{'},\, T_d^{'} \;>\; 0$$

- Forma non interagente ⇒ zeri a parte reale negativa

$$R(s) \;=\; K_p\,\frac{1+sT_i+s^2T_i\,T_d}{s\,T_i}$$

$$K_p \;>\; 0$$
$$T_i,\, T_d \;>\; 0$$

- Forma parallela ⇒ zeri a parte reale negativa

$$R(s) \;=\; \frac{K_i+s\,K_p+s^2K_d}{s}$$

$$K_p \;>\; 0$$
$$K_i,\, K_d \;>\; 0$$

PID realizzabile

- Si limita l'amplificazione del "derivatore" ad alta frequenza introducendo un filtro LP del 1.º ordine

$$K_p T_d s \quad \Rightarrow \quad \frac{K_p T_d s}{1 + s\dfrac{T_d}{N}}$$

$$5\,(10) \leq N \leq 10\,(100)$$

- In questo modo la fdt del PID diviene propria (PID realizzabile).

FdT del PID realizzabile

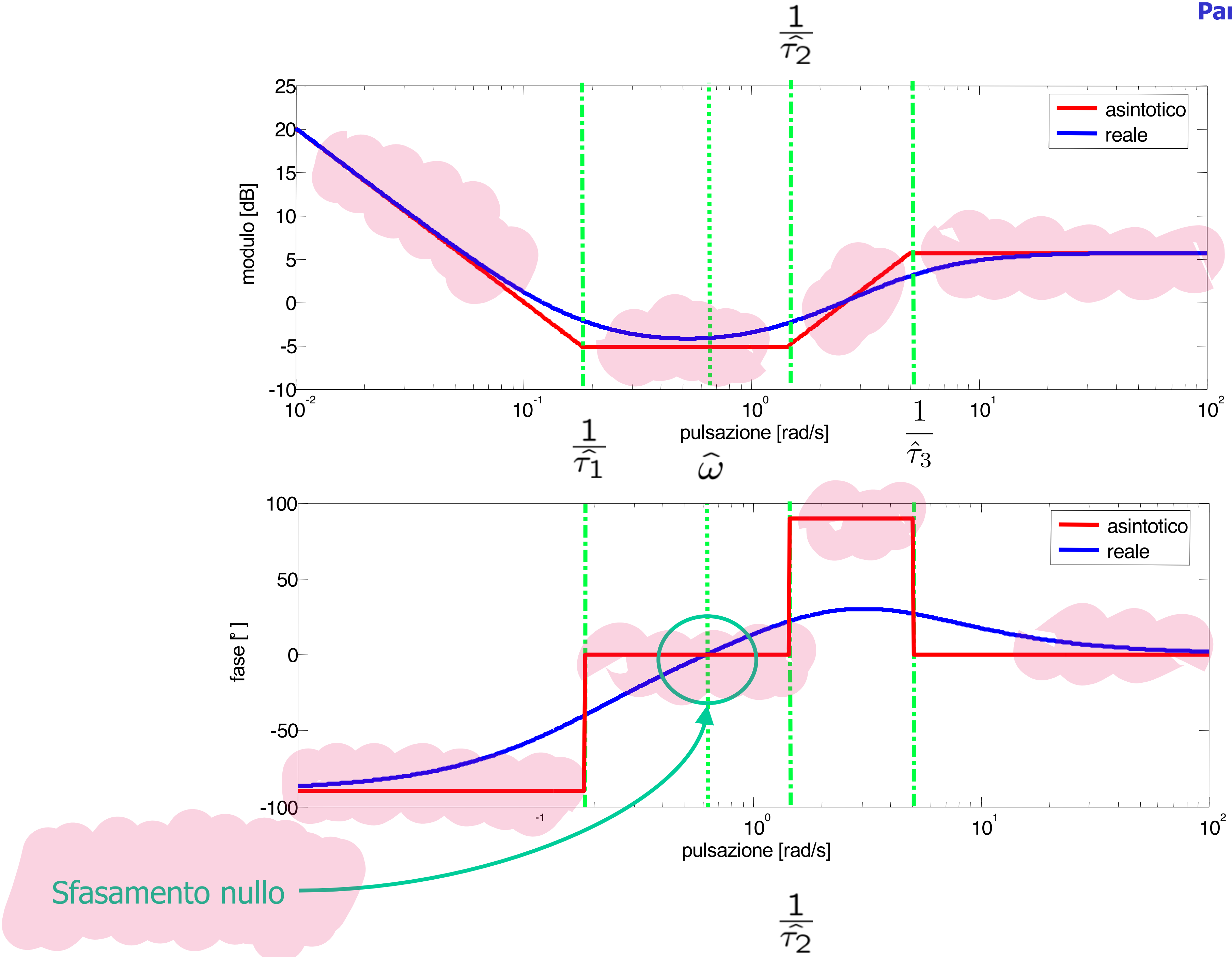
$$R(s) \;=\; K_i \,\frac{\left[1 + s\left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) + s^2\, T_i\, T_d \left(1 + \frac{1}{N}\right)\right]}{s\left(1 + s\,\frac{T_d}{N}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$R(s) \;=\; K_i \,\frac{(1 + s\,\hat{\tau}_1)\,(1 + s\,\hat{\tau}_2)}{s\,(1 + s\,\hat{\tau}_3)}$$

$$\begin{array}{l} N \gg 1 \\ T_d < T_i \end{array} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \hat{\tau}_1 \approx \tau_1 \\ \hat{\tau}_2 \approx \tau_2 \end{array}\right\} \text{PID ideale}$$

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1,\, \hat{\tau}_2$$



$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$
25
20
15
10
5
0
-5
-10
modulo [dB]
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione [rad/s]
asintotico
reale
$\frac{1}{\hat{\tau}_1}$
$\hat{\omega}$
$\frac{1}{\hat{\tau}_3}$
100
50
0
-50
-100
fase [°]
pulsazione [rad/s]
Sfasamento nullo
$\frac{1}{\hat{\tau}_2}$

PID e pulsazione a sfasamento nullo

- Partendo dall' espressione

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\,\hat{\tau}_1)\,(1 + s\,\hat{\tau}_2)}{s\,(1 + s\,\hat{\tau}_3)}$$

ed imponendo $\angle R(j\hat{\omega}_{\text{reale}}) = 0$

si ottiene $\hat{\omega}_{\text{reale}} = \dfrac{1}{\sqrt{\hat{\tau}_1\hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2)\hat{\tau}_3}}$

Lo si verifichi

- Partendo invece dall'espressione del PID non fisicamente realizzabile in forma non interagente

$$R(s) = K_p \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{s\,T_i} = K_i \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{s}$$

imponendo

$$\angle R(j\bar{\omega}_{\text{ideale}}) = 0$$

si ottiene stavolta

$$\bar{\omega}_{\text{ideale}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Lo si verifichi

- Si noti che

$$\hat{\tau}_3 \ll \hat{\tau}_1,\ \hat{\tau}_2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\omega}_{\text{reale}} \approx \bar{\omega}_{\text{ideale}}$$

Effetto del polo aggiuntivo LP: scelta di N

- Affrontiamo ora il problema del rumore di misura: come moderare l'effetto del rumore sulla legge di controllo di tipo derivativo? Si utilizza il polo aggiuntivo LP.

- Al crescere di N, il PID realizzabile si comporta sempre più come quello ideale.
- Al crescere di N è sempre minore l'azione filtrante LP sul rumore: si eccita sempre più l'attuatore con segnale indesiderato (si amplifica il rumore di misura; la sensitività del controllo cresce [in modulo] alle alte frequenze).
- **Scelta "ottima"**: determinare un valore 'basso" di N, che ponga comunque il polo in $-N/T_D$ **al di fuori della banda di interesse** per il controllo.