Analisi dei sistemi retroazionati

Prestazioni dei sistemi di controllo

Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode

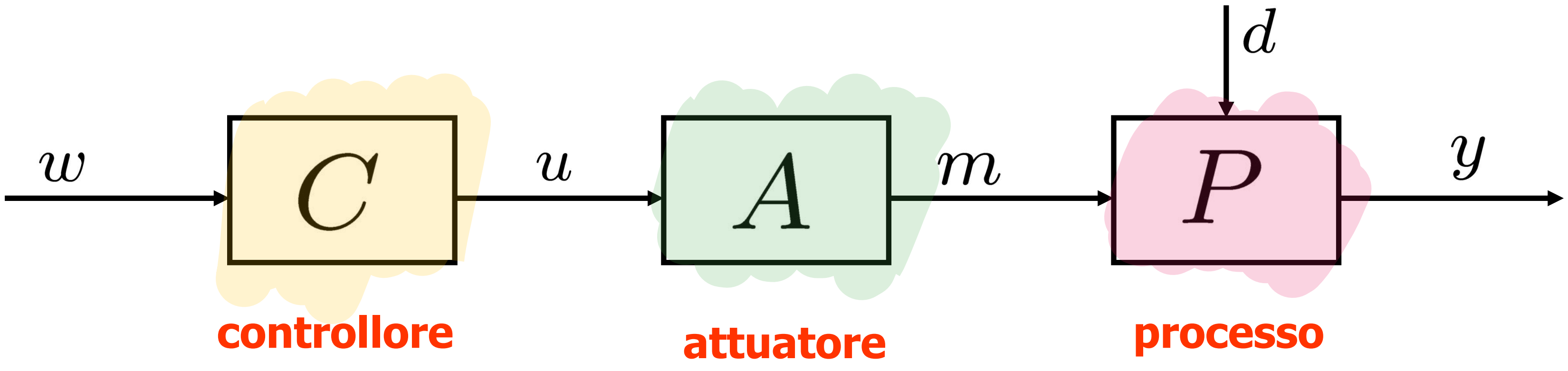
Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
  - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8]) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.

- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

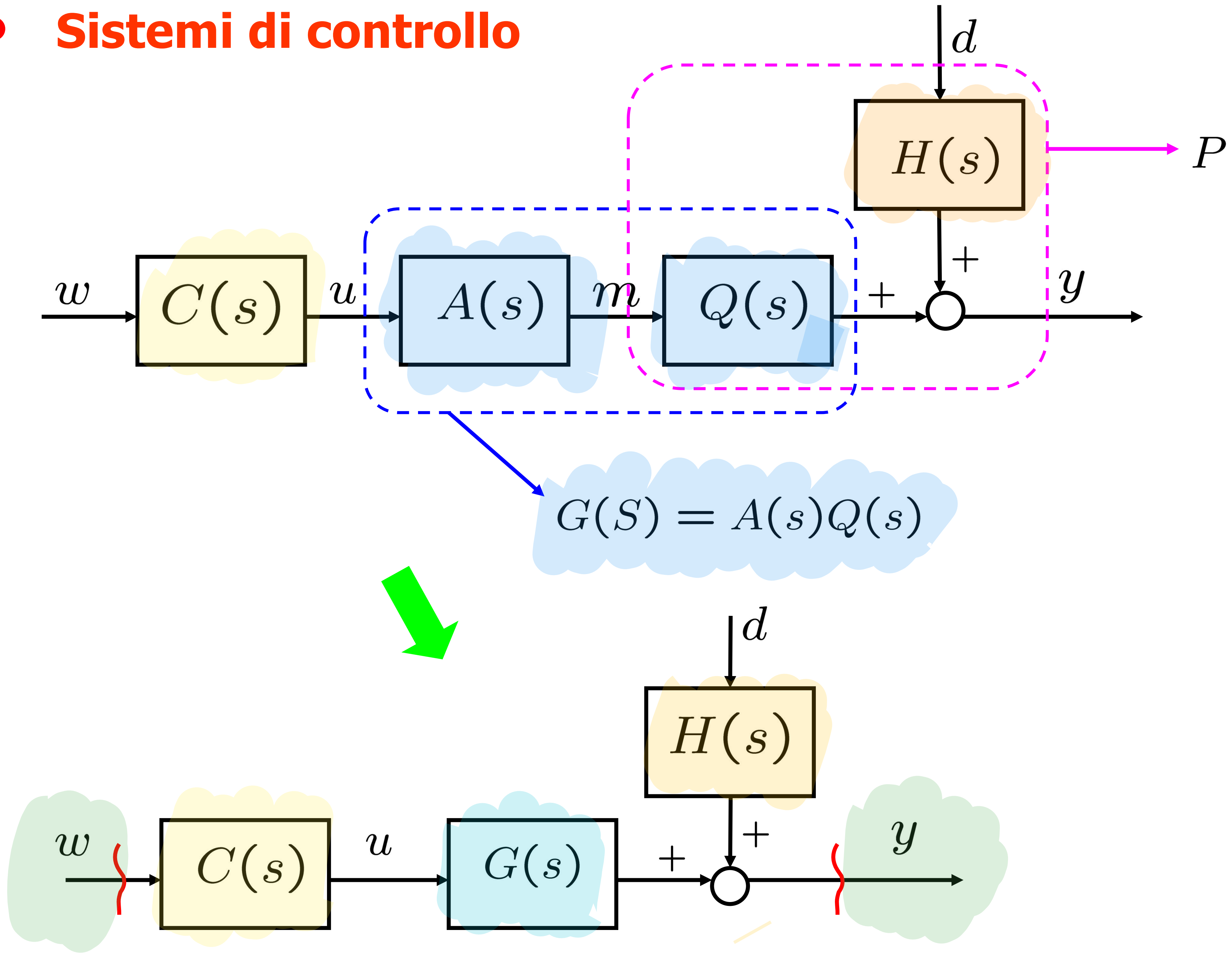
• Sistemi di controllo

- Anello aperto



Ipotesi: C, A, P sistemi dinamici lineari

Sistemi di controllo



• Prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$C(s)G(s) = 1$$

Passa-tutto
con $\mu = 1$

$$C(s) = G(s)^{-1}$$

Quindi il controllore
"perfetto" in a.a. deve
invertire la dinamica
del sistema

• Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro (Re>=0)

- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile

- C(s) potrebbe avere più zeri che poli (=>non realizzabile)

- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su G(s)

• Esempi

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s} \longrightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\frac{1}{1+0{,}01s}$$

$$\Rightarrow \quad F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1+0.01s}$$

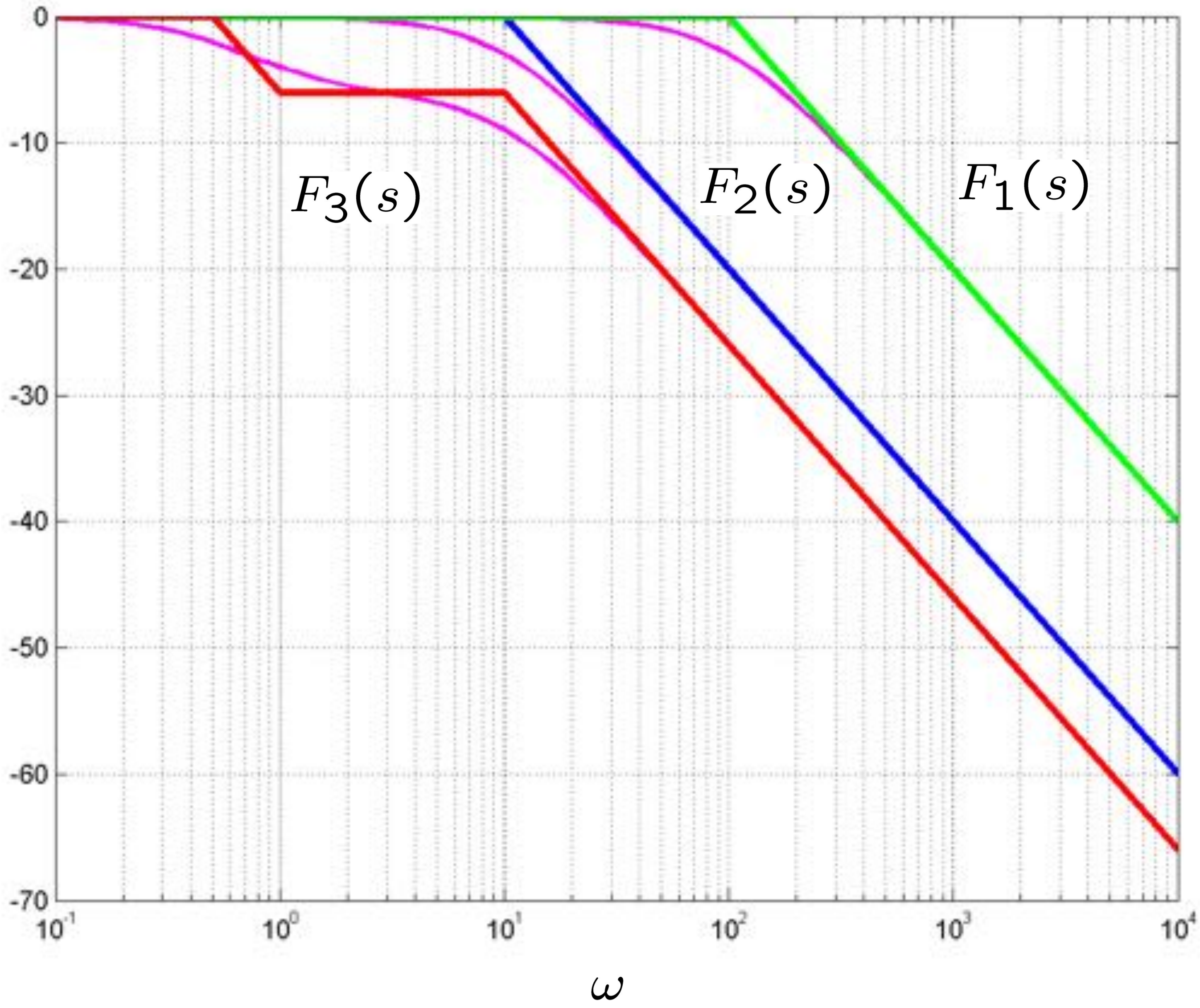
Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{1+s}$$ $\longrightarrow$ Realizzabile

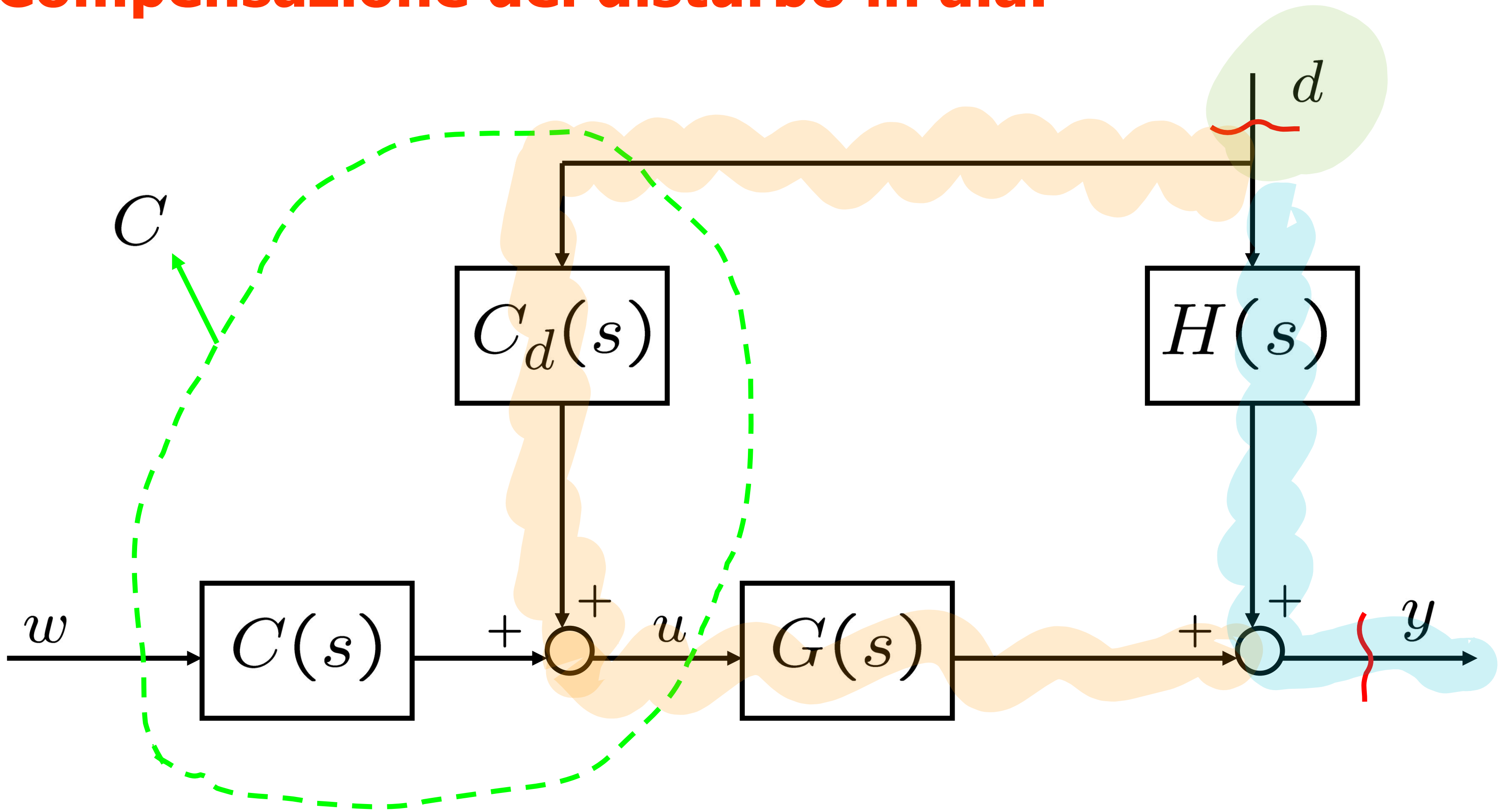
$\Rightarrow$ $$F_2(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0,\ 10]$

$$C_3(s) = 0.1$$ $\longrightarrow$ Realizzabile

$\Rightarrow$ $$F_3(s) = \frac{1+s}{(1+2s)(1+0.1s)}$$ Filtro P.B. con $B \simeq [0, 0.5]$


0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
$F_3(s)$
$F_2(s)$
$F_1(s)$
ω

• Compensazione del disturbo in a.a.



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo $d(t)$

Prestazione ideale

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$

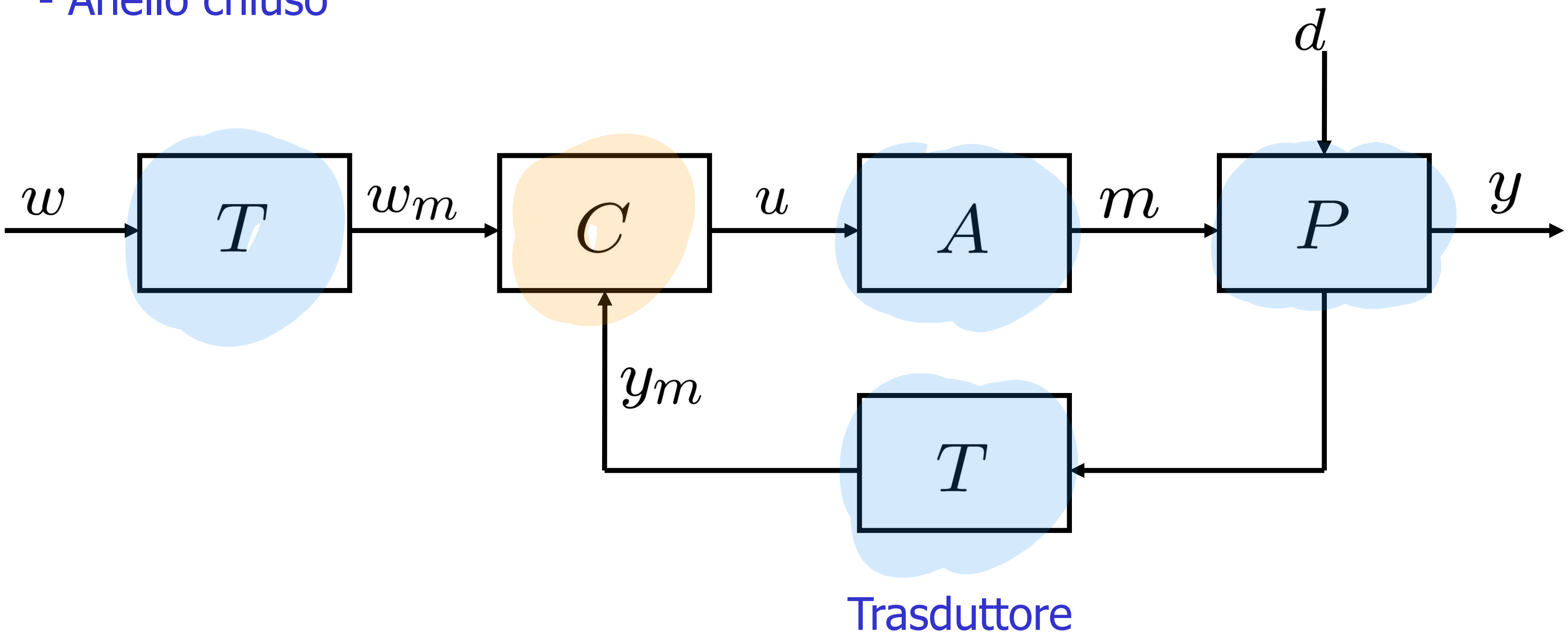
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$C_d(s) = -G(s)^{-1} H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

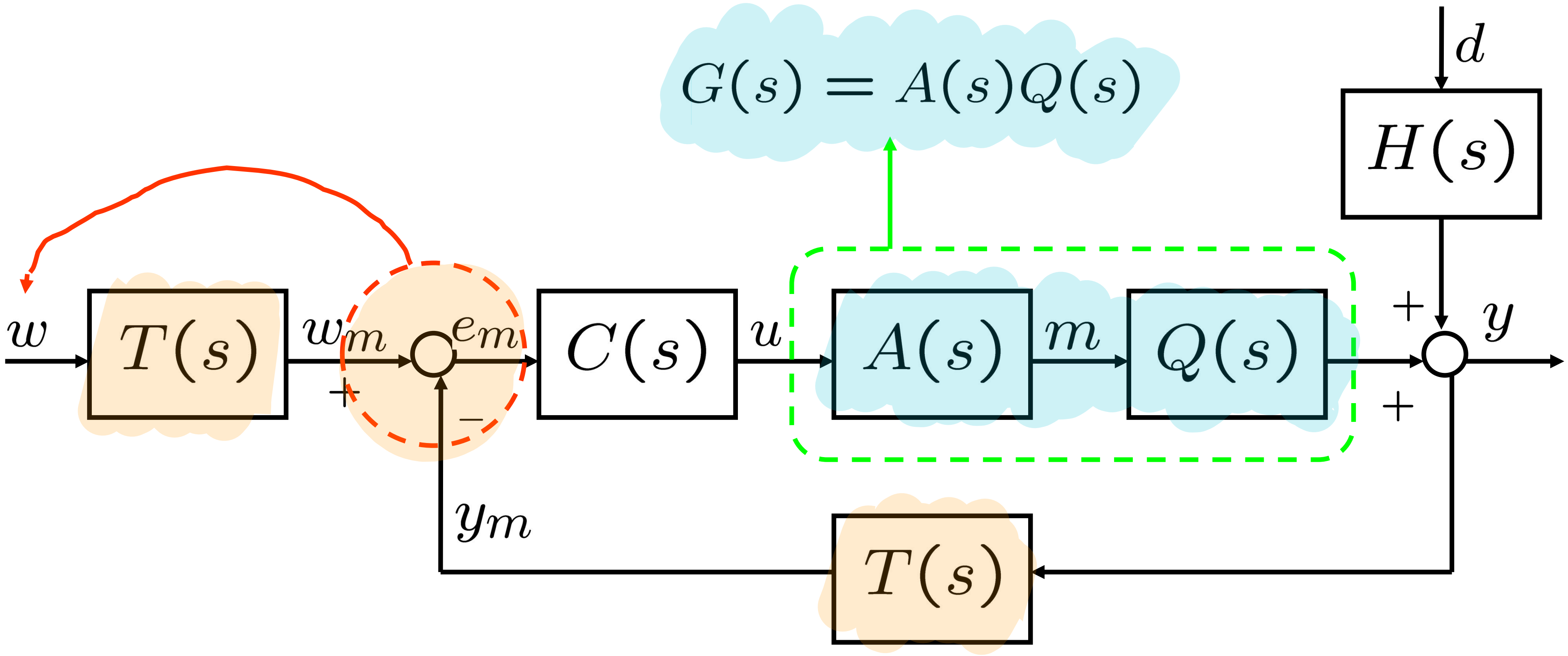
Sistemi di controllo

- Anello chiuso



Ipotesi: - T, A, C, P sistemi lineari

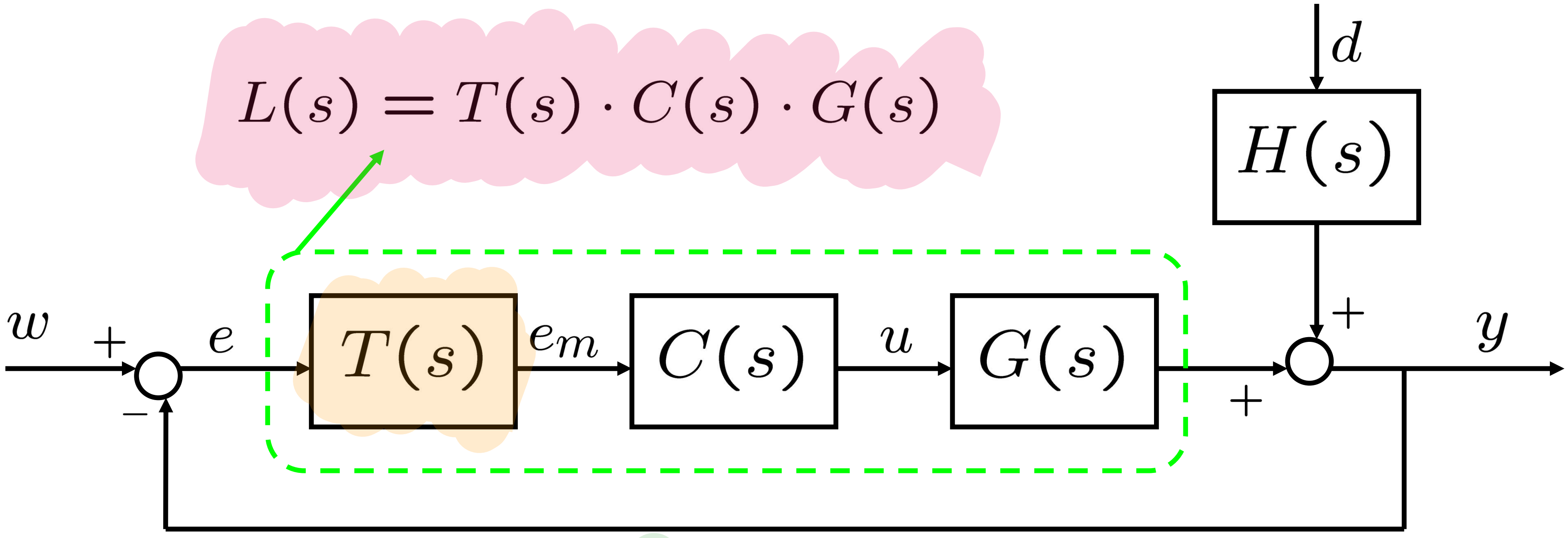
- azione di controllo basata su $w_m - y_m = e_m$

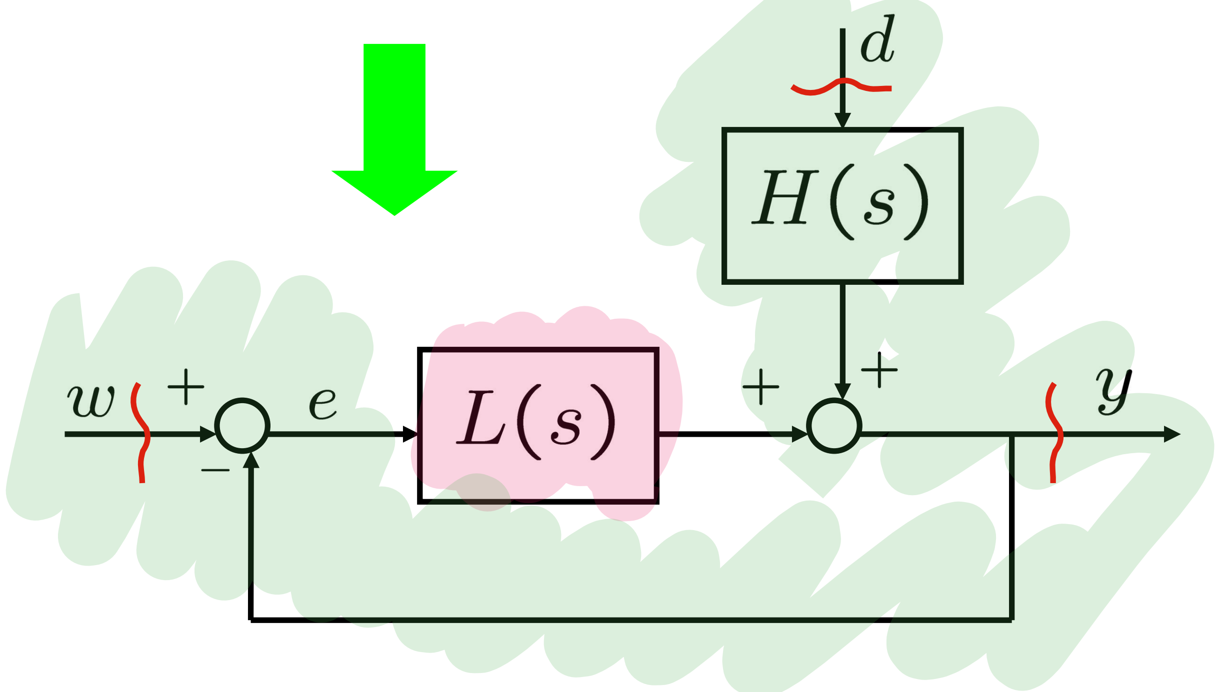


$$E_m(s) = W_m(s) - Y_m(s) =$$

$$= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)$$

$$L(s) = T(s) \cdot C(s) \cdot G(s)$$





- **Prestazioni ideali**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \underline{\neq 1}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1+L(s)} \underline{\neq 0}$$

Soluzione realistica

- $F(s)$: Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno $\mu_F = 1$

- $M(s)$: $|M(j\omega)| \simeq 0$

  nella banda di ω in cui lo spettro di $d(t)$ è significativo

Analisi di sistemi retroazionati

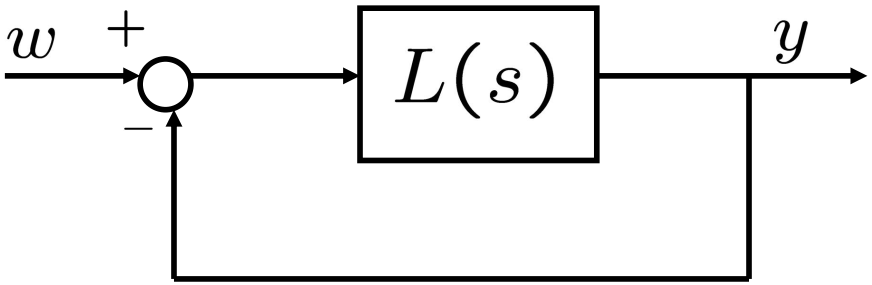
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1+L(s)}$$

• Stabilità di sistemi retroazioati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

Asintotica stabilità $\Leftrightarrow$ Le radici di $\varphi(s) + N(s)$ hanno Re<0

Diagramma di Nyquist

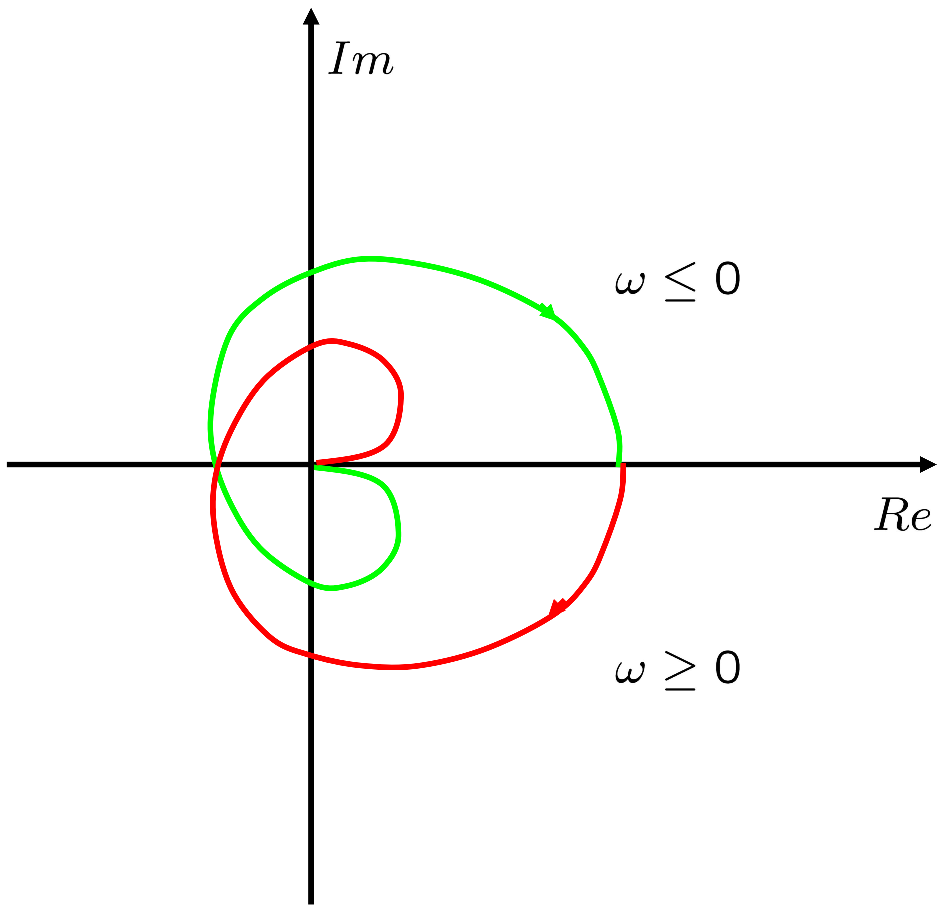
Γ = D.D.N = grafico di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$

= diagramma polare ($\omega \geq 0$)

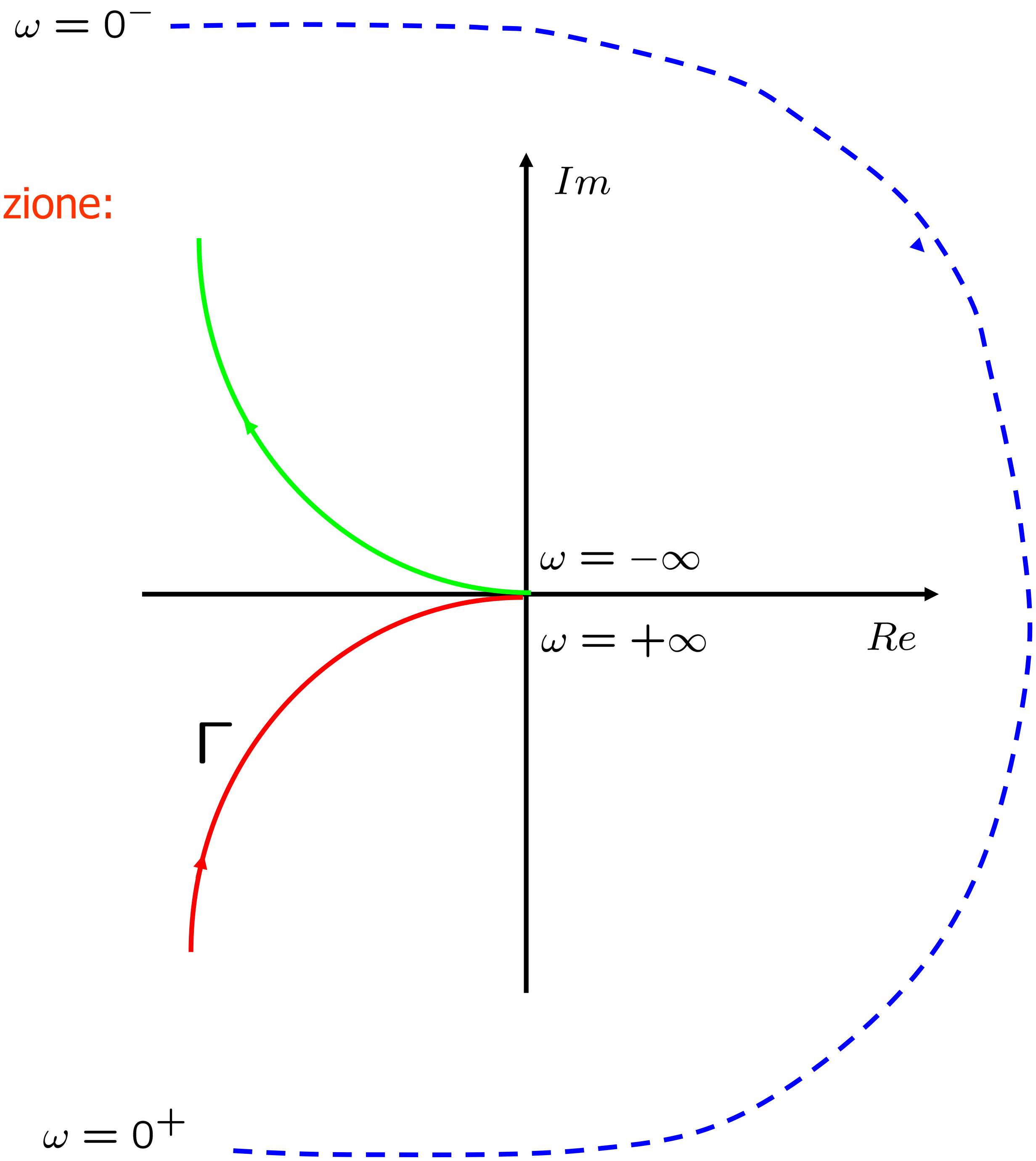
+

simmetrico rispetto all' asse reale

Osservazione: $L(-j\omega) = L^*(j\omega)$



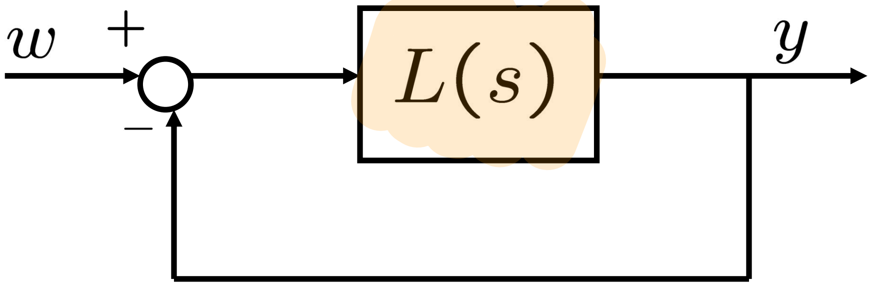
Attenzione:



Convenzione:

chiusura all' infinito in senso orario

Criterio di Nyquist



$$1 + L(s) = 0$$

- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con Re>0

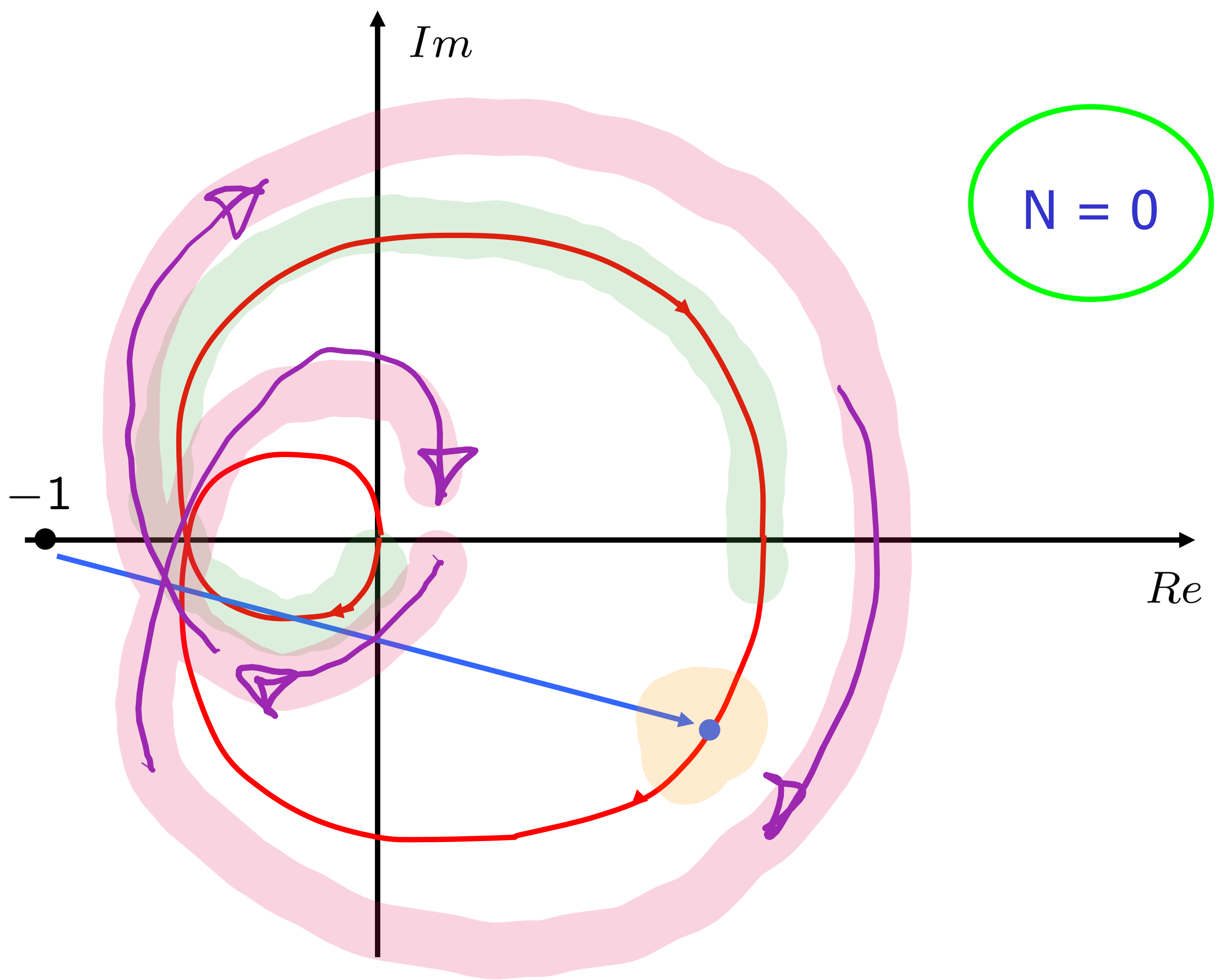
$$\boxed{\text{Asintotica stabilità} \iff \begin{cases} \text{N ben definito} \\ \underline{\text{N = P}} \end{cases}}$$

Osservazioni

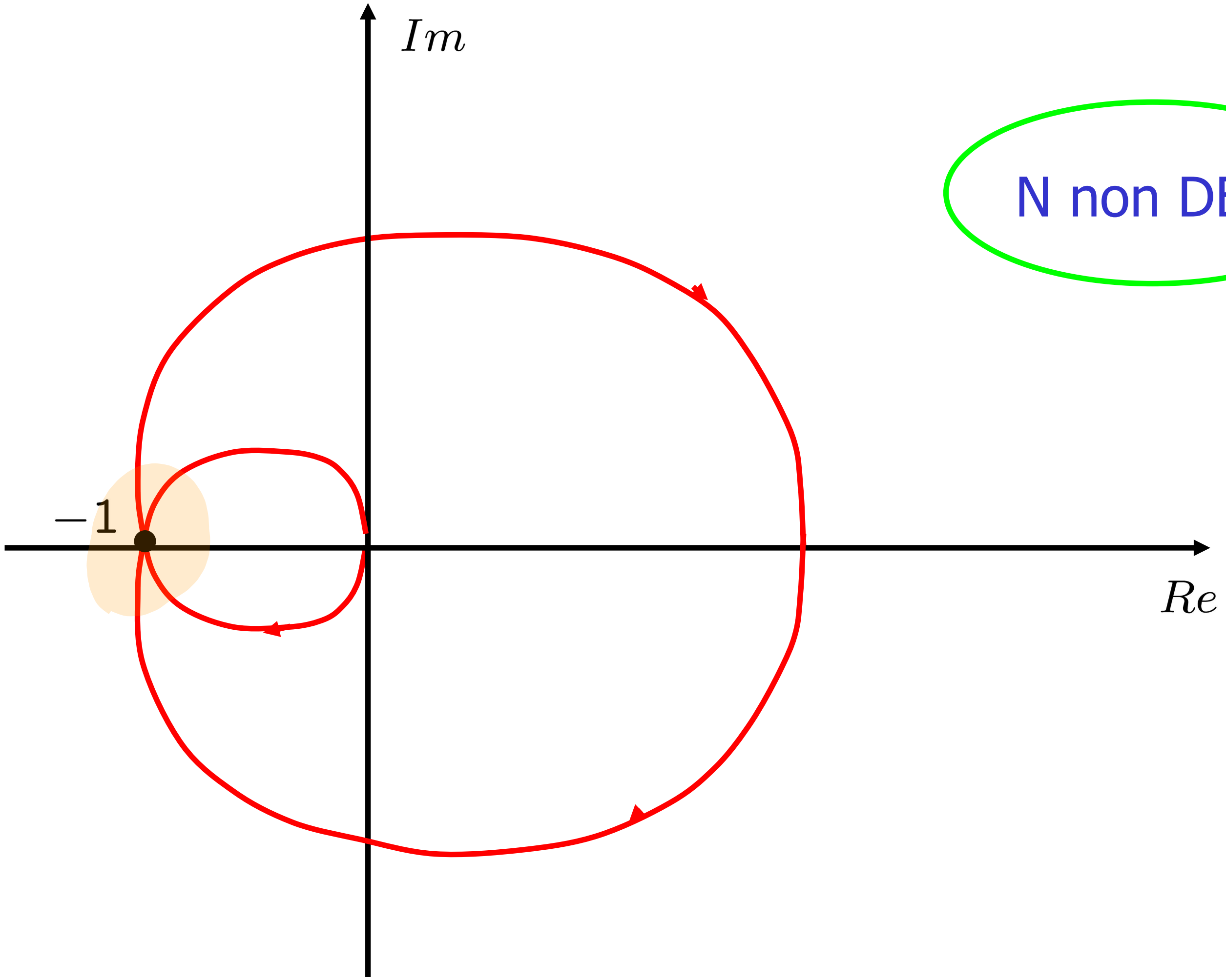
- conteggio di N ?

- N non definito ⇒ non as. stabilità

- N<0 ⇒ non as. stabilità

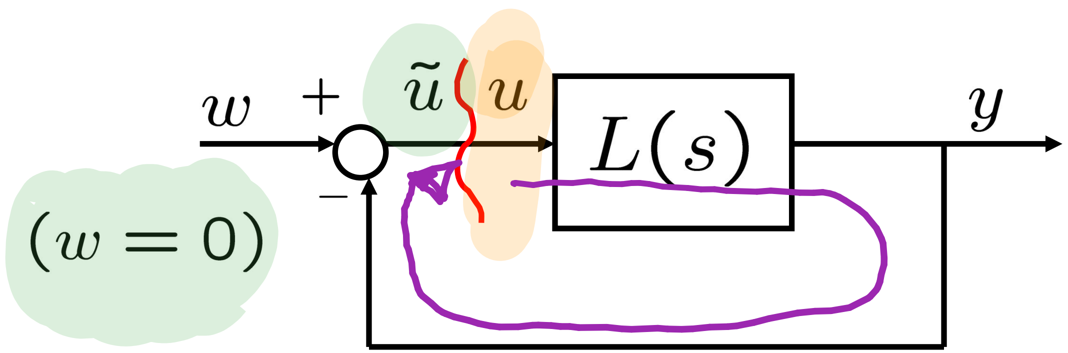


Im
-1
Re
N = 0



N non DEF.

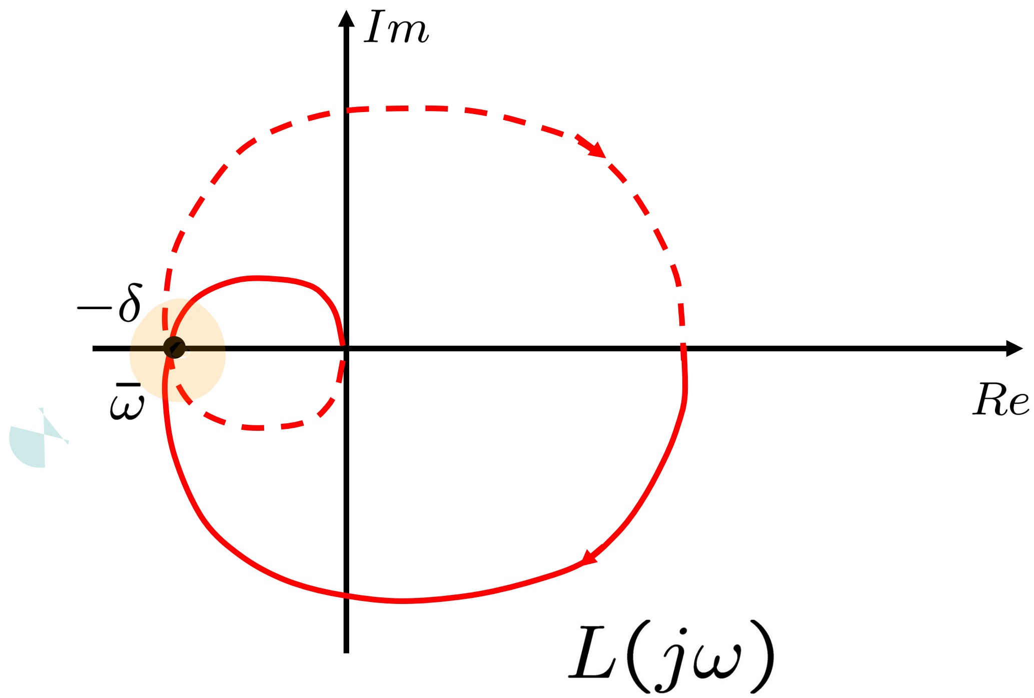
Giustificazione intuitiva



$L(s)$ As. stabilità

$\Downarrow$

P = 0



$$L(j\bar{\omega}) = -\delta$$

$\Updownarrow$

$$|L(j\bar{\omega})| = \delta$$

$$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

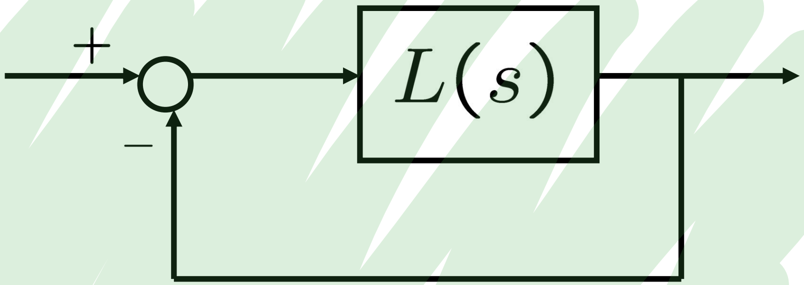
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

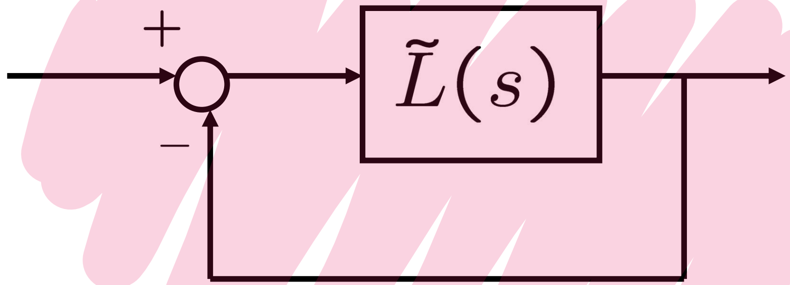
Quindi:

- $\delta > 1$ $\Rightarrow$ instabilità N ≠ 0 (= P)
- $\delta < 1$ $\Rightarrow$ as. Stabilità N = 0 (= P)
- $\delta = 1$ $\Rightarrow$ non as. Stabilità N non definito

Stabilità di sistemi retroazionati <u>incerti</u>



Modello nominale



Modello “vero”

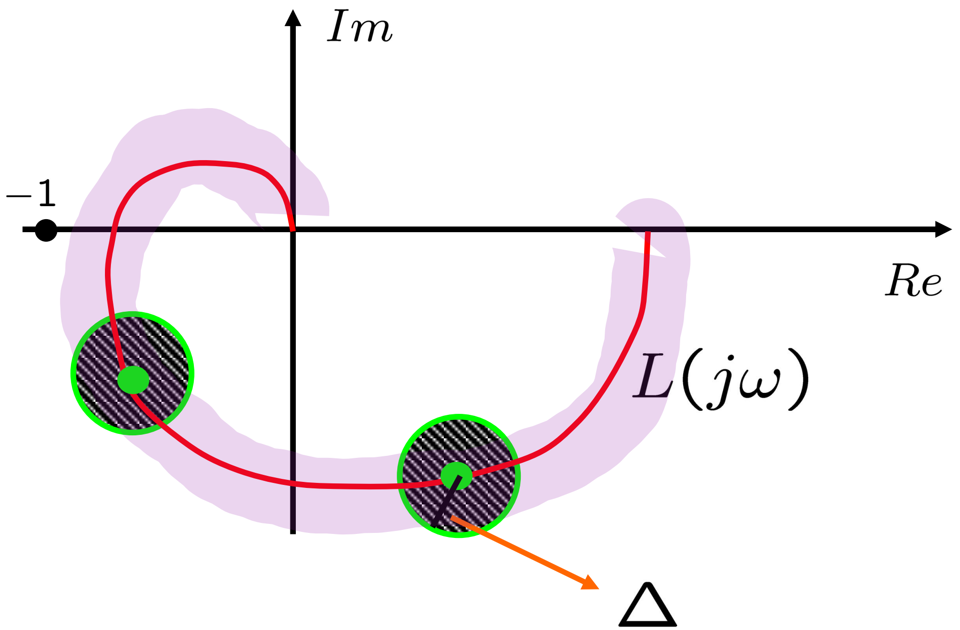
- In generale: $\tilde{L}(s) \neq L(s)$
- Stabilità robusta:

garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza

• Tipici modelli dell' incertezza

- $\tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s)$, $|\delta L(j\omega)| \leq \Delta$

incertezza additiva



- $\tilde{L}(s) = K \cdot L(s)$, $0 < K < \bar{K}$