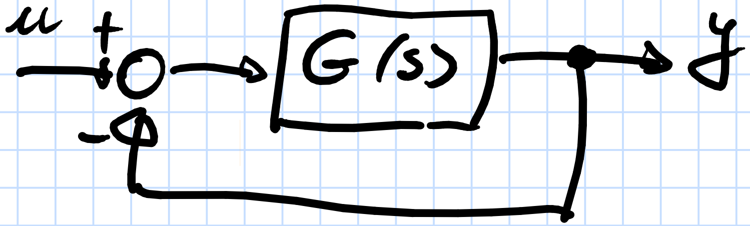
Analisi di prestazioni



$$G(s) = K\frac{s+4}{s(s+3)}$$

$K \in \mathbb{R}$ $\quad K>0$

Determinare

(a) i valori di K per cui il sistema a ciclo chiuso sia es. stabile

(b) i valori di K per cui il sistema a ciclo chiuso (sia es. stabile) abbia una risposta allo scalino unitario con sovraelongazione

(c) il valore di K per cui la sovraelongazione è massima

Risposta (a)

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{N(s)}{N(s)+D(s)} \qquad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$D_F(s) = N(s) + D(s) = s^2 + (3+K)s + 4K$$

Criterio di R.H.

$$\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 4K \\ 1 & 3+K & \\ 0 & 4K & \end{array}$$

$$\begin{cases} 3+k>0 \\ 4K>0 \\ k>0 \end{cases}$$

stabilità asintotica $\forall K>0$

Risposta (b)

$$F(s) = \frac{K(s+4)}{s^2 + (3+K)s + 4K} \qquad K>0$$

FA ParTe 7, #72

$$\mu \frac{(1+sT)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$F(s) = \frac{\overset{1}{\cancel{4K}}\left(1 + s/4\right)}{\underset{1}{\cancel{4K}}\left[1 + \frac{3+K}{4K}s + \frac{s^2}{4K}\right]} \qquad K>0$$

$$= \frac{1+s/4}{1 + \frac{3+K}{4K}s + s^2/4K} \qquad \mu = 1$$

$$F(s) = 1 \cdot \frac{1 + s/4}{1 + \frac{3+K}{4K} s + \frac{s^2}{4K}}$$

$T = 1/4$

$$2\frac{\xi}{\omega_n} = \frac{3+K}{4K} \qquad \omega_n^2 = 4K$$

$$\omega_n = 2\sqrt{K} \qquad \xi = \frac{\sqrt{K}}{4}\left(1 + \frac{3}{K}\right)$$

per avere sovraelongazione $\Rightarrow$ $0 < \xi < 1$

$$0 < \frac{\sqrt{K}}{4}\left(1 + \frac{3}{K}\right) < 1$$

$K > 0$

$$\frac{\sqrt{k}}{4}\left(1+\frac{3}{k}\right)<1 \quad / \cdot 4k \qquad k>0$$

$$\sqrt{k}(k+3)<4k \quad / \; (\;)^2$$

$$\cancel{k}^{1}(k^2+6k+9)<16\cancel{k^2}^{1} \quad / : k \; (>0)$$

$$k^2-10k+9<0$$

$$1<k<9$$

per $K=1$? per $K=9$? e per $K<1$ o $K>9$?

$D_F(s) = s^2 + (3+K)s + 4K$

al variare di K possono essere:

- 2 poli reali distinti
- 2 poli reali coincidenti
- 2 poli compl. con.

$s^2 + (3+K)s + 4K = 0$

$\Delta = (3+K)^2 - 16K$

$\Delta > 0 \quad K^2 - 10K + 9 > 0$

$(K>0) \quad K<1 \, , \, K>9$

$\Delta = 0 \quad K=1, \; K=9$

$\Delta < 0 \quad 1 < K < 9$

Rizgoba (c) | $1 < K < 3$

zavadonjetsbuc $\Delta = e^{\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$

$\max \Delta$

$\xi \leftarrow \xi(K)$

$\min\limits_{\xi} \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

$\xi = \frac{\sqrt{K}}{4}\left(1+\frac{3}{K}\right) \Longrightarrow$

$$\min_{k} \frac{\pi^2 \frac{k}{16}\left(1+\frac{3}{k}\right)^2}{1-\frac{k}{16}\left(1+\frac{3}{k}\right)^2}$$

$$\min_{k} \pi^2 \frac{k^2+6k+9}{-k^2+10k-9}$$

$k>0$

$$\frac{d}{dk}=0 \Rightarrow \overset{1}{\cancel{-2}}\,\overset{1}{\cancel{(k+3)}}(k-1)(k-3)+$$

$$-\left(\underset{1}{\cancel{-2}}\right)(k+3)^{\overset{1}{\cancel{2}}}(k-5)=0$$

$$\frac{d()}{dk} = 0 \implies 8k - 24 = 0$$

$$k = 3$$

$$k=3 \implies \xi = \frac{\sqrt{k}}{4}\left(1 + \frac{3}{k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}867$$

poli molto smorzati

c.c.

$$\Delta_M = \Delta(k=3) = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\simeq 4{,}23 \cdot 10^{-3}$$

Per quale valore di K ottengo $t_{a_{1\%}} = 1s$?

$$t_{a_{1\%}} \simeq \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi \omega_n}$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$$

$$D_F(s) \Longrightarrow s^2 + (3+K)s + 4K = 0$$

se p_1, p_2 soluzioni

$$s^2 - (p_1 + p_2)s + p_1 \cdot p_2 = 0$$

$s^2 + (3+K)s + 4K = 0$

$-(3+K) = -2\sigma = -10 \rightarrow K = 7$

$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$

$p_{1,2} = -5 \pm j\sqrt{3}$

$t_a \simeq 1s$