Realizzazione:

da FdT di ordine 1

ad equazioni di stato

NB approccio valido SOLO

per sistemi LTI SISO

di ordine $n=1$

LTI, $n=1$, SISO, Tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$d = 0 \Longleftrightarrow$ sistema strettamente proprio

$d \neq 0 \Longleftrightarrow$ sistema non strettamente proprio

FdT $D(s)$ grado 1

$N(s)$ grado 0

FdT $D(s)$ grado 1

$N(s)$ grado 1

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \xRightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX - \overbrace{x(0)}^{=0} = aX + bU \\ Y = cX + dU \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \dfrac{b}{s-a} U(s) \\ Y(s) = \dfrac{cb}{s-a} U(s) + d\, U(s) \end{cases}$$

$$T_{u,y}(s) = \frac{cb}{s-a} + d = \frac{ds + (cb - da)}{(s-a)}$$

$$T(s) = \frac{ds + (cb - da)}{(s-a)}$$

$d = 0$

sistema strettamente proprio

$$T(s) = \frac{cb}{s-a}$$

$m = 0$

$n = 1$

$d \neq 0$

$m = 1$

$$T(s) = \frac{ds + (cb - da)}{s-a}$$

$n = 1$

ordine $n = 1$

SISO

Voglio utilizzare queste informazioni per risolvere il problema inverso:

data una FdT di ordine 1, SISO, trovare una realizzazione in f. di stato

FdT $m=1$
$n=0$

$$G(s)=\frac{f}{ps-q}$$

$f, p, q \in R$
$p \neq 0$

Per confronto

$$\frac{f}{ps-q} = \frac{f/p}{s-(q/p)} \longleftrightarrow \frac{cb}{s-a}$$

divido Num e Den per p

$$\begin{cases} cb = f/p \\ a = q/p \end{cases}$$

infinite soluz.

scelta comoda

$b=1 \longrightarrow c = f/p$

$c=1 \longrightarrow b = f/p$

2 possibili realizzazioni equivalenti

(2 tra le infinite possibili → scegliete c ($\in \mathbb{R}$) → calcolate b [ogni volta usa])

1ª scelta

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{q}{p}\right) x + u \\ y = \left(\frac{f}{p}\right) x \end{cases}$$

2ª scelta

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{q}{p}\right) x + \left(\frac{f}{p}\right) u \\ y = x \end{cases}$$

FdT $\quad m = 1$

SISO $\quad M = 1$

$$G(s) = \frac{ps - q}{rs - w}$$

$p, q \in \mathbb{R}$

$r, w \in \mathbb{R}$

$p \neq 0$

$r \neq 0$

Per confronto

$$G(s) = \frac{ps - q}{rs - w} =$$

scompone la funzione in 2 parti

1ª parte algebrica

2ª parte FdT strett. propria

$$
\begin{array}{l|l}
ps - q & rs - w \\
\hline
-ps + \frac{wp}{r} & p/r \\
\hline
/ \quad \frac{wp - qr}{r} \triangleq \mu &
\end{array}
$$

$$G(s) = \left(\frac{p}{r}\right) + \frac{\mu}{rs - w}$$

$$G(s) = \left(\frac{p}{r}\right) + \frac{m}{rs - w}$$

$$\begin{cases} d = \frac{p}{r} \end{cases}$$

$$G(s) = d + \frac{cb}{s - a}$$

come il caso precedente

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = m/r \\ a = w/r \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 \\ c = m/r \\ a = w/r \end{cases}$$

Esempi

① $T(s) = \frac{2}{s+1} \longleftrightarrow \frac{cb}{s-a}$

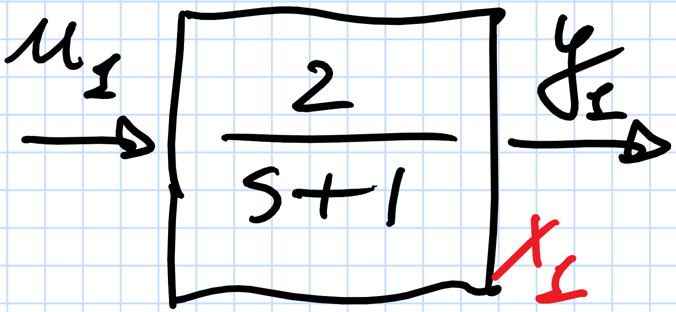
$$G(s) = \frac{cb}{s-a}$$

$$G(s) = d + \frac{cb}{s-a}$$

$a = -1$

$b = 1$ $\qquad$ $c = 1$

$c = 2$ $\qquad$ $b = 2$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = 2x_1(t) \end{cases}$$

② $T(s) = \dfrac{2s+3}{s+5}$ $\quad m=1$

$\quad n=1$

$$\begin{array}{l|l} 2s+3 & s+5 \\ \hline -2s-10 & 2 \\ \hline 1 \quad -7 & \end{array}$$

$$T(s) = 2 - \frac{7}{s+5}$$

$$G(s) = d + \frac{cb}{s-a}$$

$d = 2$

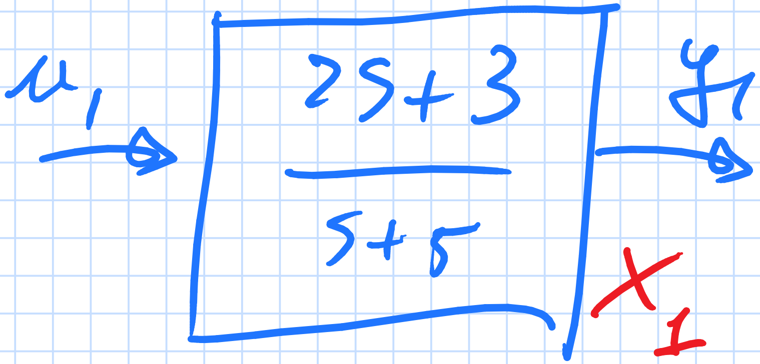
$a = -5$

$b = 1$

$c = -7$

$c = 1$

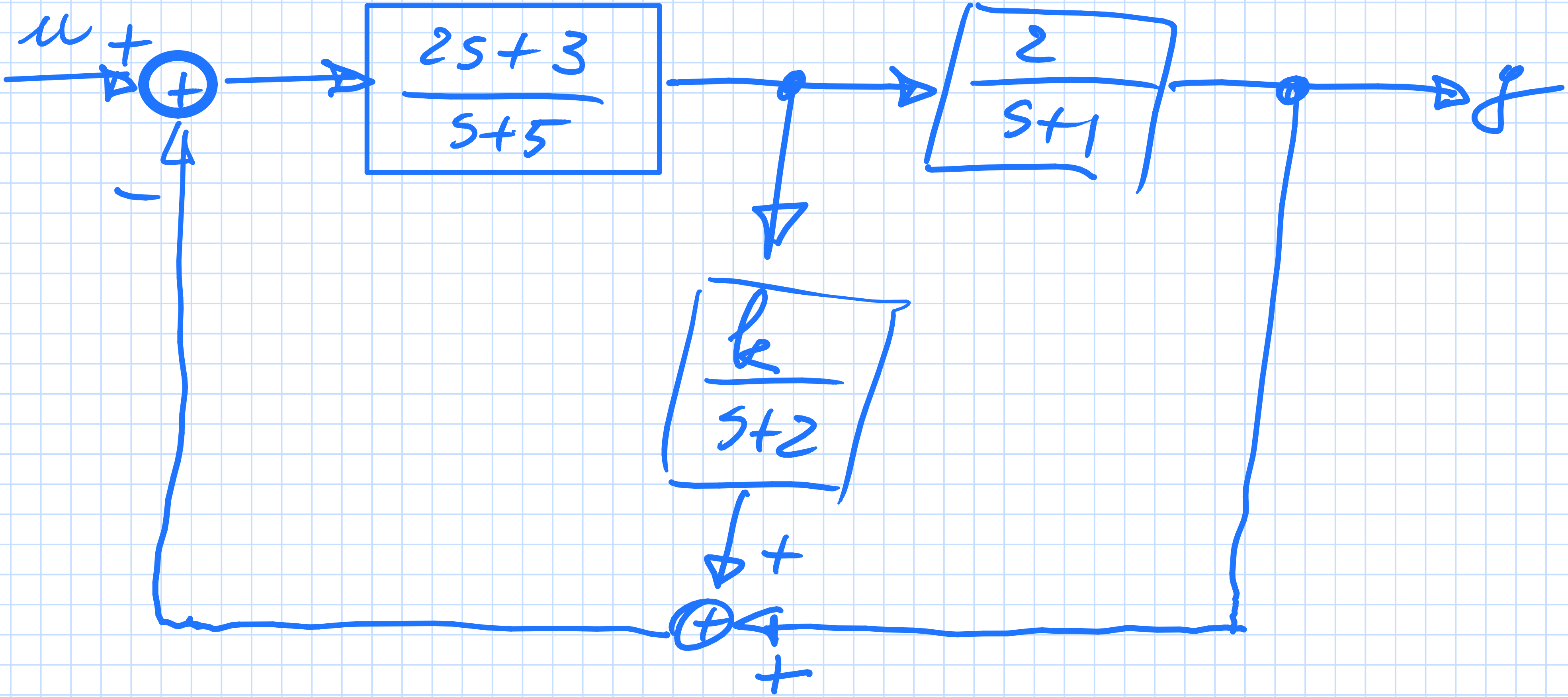
$b = -7$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = -7x_1(t) + 2u_1(t) \end{cases}$$

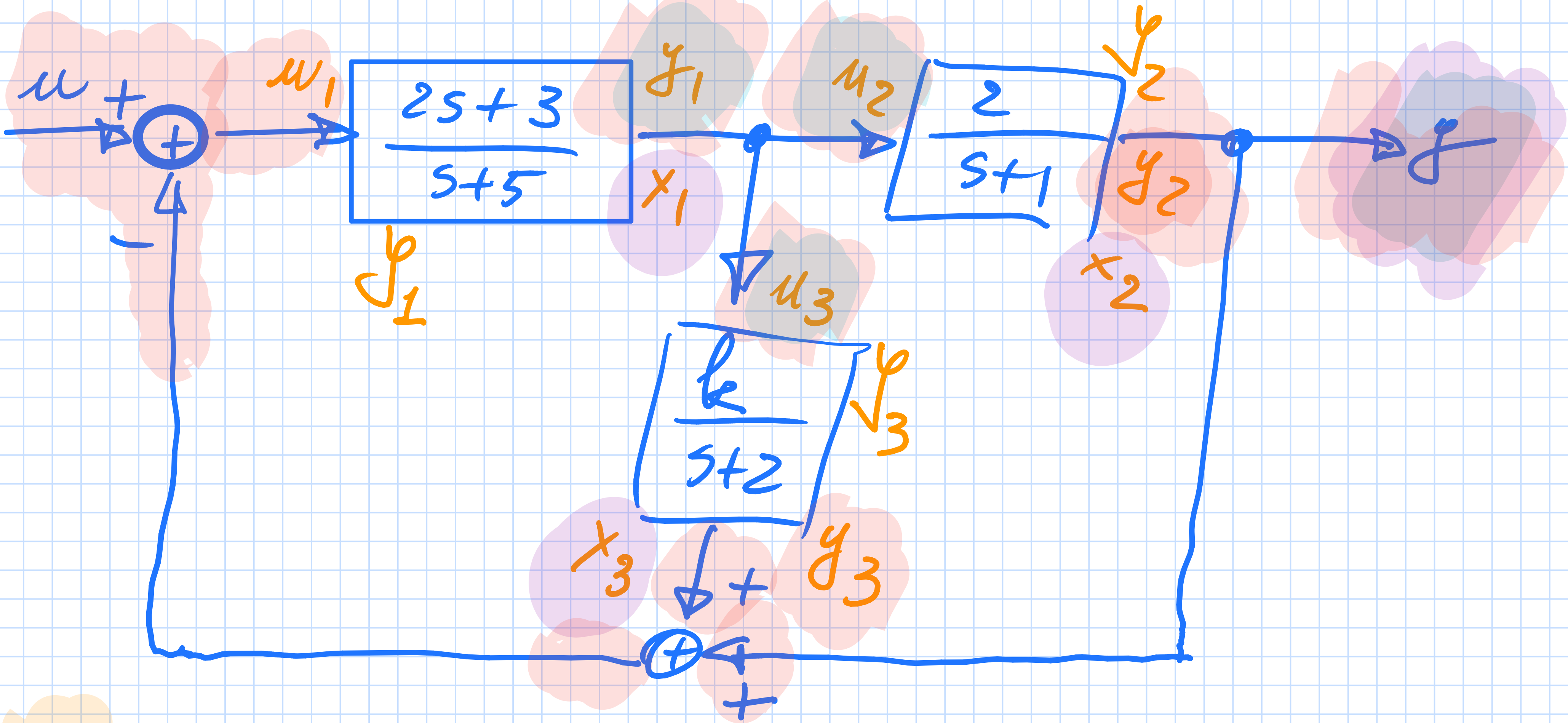
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 7u_1(t) \\ y(t) = x_1(t) + 2u_1(t) \end{cases}$$

3



Trovare una realizzazione in eq. di stato

NON modificate lo schema!



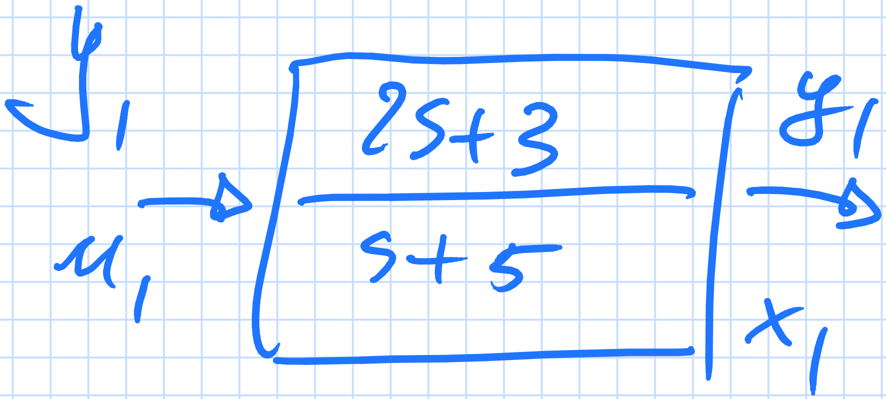
(•) etichettare: blocchi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ . . .

(•) etichettare ingressi, uscite e variabili di stato di ogni blocco

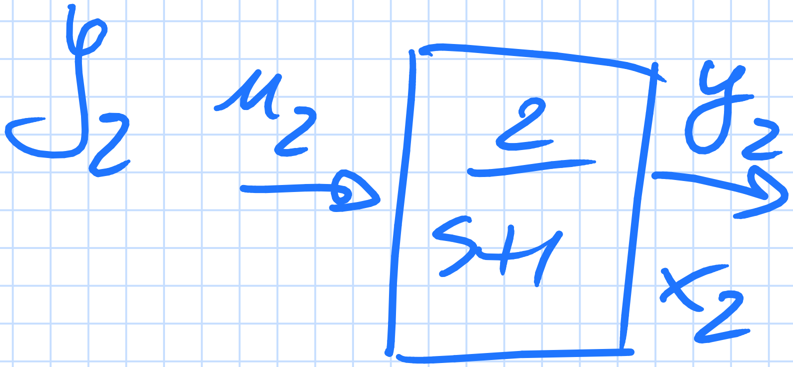
(•) trovare una realizz. in eq. di stato $\forall \mathcal{S}_i$

(•) descrivere con eq. ausiliarie le interconnessioni tra i blocchi $\mathcal{Y}_i$

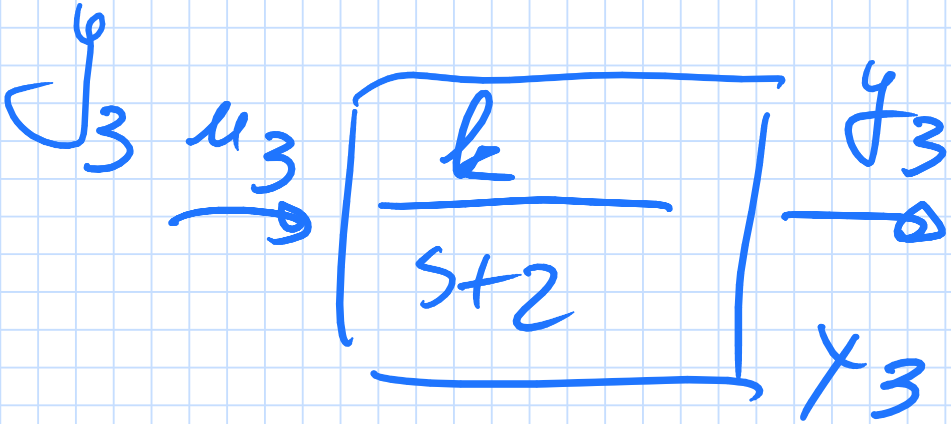
(•) eliminare variabili ausiliarie $\left(u_1, y_1, u_2, u_3, y_2, y_3 \right)$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 7u_1 \\ y_1 = x_1 + 2u_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + 2u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -2x_3 + k u_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = -5x_1 - 7u_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2u_2$$
$$\dot{x}_3 = -2x_3 + k u_3$$

$$u_1 = u - y_2 - y_3 = u - x_2 - x_3$$
$$u_2 = y_1 = x_1 + 2u_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2u$$
$$u_3 = y_1 = x_1 + 2u_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2u$$
$$y_1 = x_1 + 2u_1$$
$$y_2 = x_2$$
$$y_3 = x_3$$

$$y = y_2 = x_2$$

Dopo aver sostituito le variabili accessorie sfruttando le relazioni algebriche che legano le var. ausiliarie alle variabili di stato (x_1, x_2, x_3) di ingresso e uscita del sistema totale (u, y)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 7u \\ \dot{x}_2 = +2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 4u \\ \dot{x}_3 = kx_1 - 2kx_2 - 2(1+k)x_3 + 2ku \\ y = x_2 \end{cases}$$

ordine 3

$\boxed{\text{LTI, SISO, } n=1\text{, tempo discreto}}$

$$\begin{cases} x(k+1) = a\,x(k) + b\,u(k) \\ y(k) = c\,x(k) + d\,u(k) \end{cases}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

$$T(z) = C\,(zI - A)^{-1} B + D$$

$$= \frac{cb}{z-a} + d$$

← struttura analoga al caso "a tempo continuo"

$$G_1(z) = \frac{f}{pz - q}$$

$m = 0$

$n = 1$

$p \neq 0$

sistema strettamente proprio

Per confronto

$$G_1(z) = \frac{f/p}{z - q/p} \longleftrightarrow T(z) = \frac{cb}{z - a}$$

$a = q/p$

$b = 1$
$c = f/p$

$c = 1$
$b = f/p$

$$\begin{cases} x(k+1) = \left(q/p\right) x(k) + u(k) \\ y(k) = \left(f/p\right) x(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = q/p \; x(k) + f/p \, u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

$$G_1(z) = \frac{ez+f}{pz+q} \qquad e,f,p,q \in \mathbb{R}$$

$e \neq 0$

$p \neq 0$

$n = 1$

$m = 1$

In modo analogo al caso "a tempo continuo"

$$\begin{array}{l|l} ez + f & pz+q \\ \hline -ez - \frac{eq}{p} & e/p \\ \hline / \quad f - \frac{eq}{p} & \end{array}$$

$$G(z) = \frac{e}{p} + \frac{\left(f - \frac{eq}{p}\right)/p}{z + q/p}$$

$$T(z) = d + \frac{cb}{z-a}$$