Esercizio 1

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$k \in \mathbb{R}$

- Studiare la stabilità del sistema al variare di k

A triangolare superiore

$\hookrightarrow$ $\lambda_1 = +1$ $\lambda_3 = k$

$\lambda_2 = 0$

$Re > 0$ $\forall k$

sistema instabile $\forall k$

È un buon stato sistema a tempo discreto?

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

$$y(k) = C\,x(k) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = +1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = k$

$|k| < 1$ sistema semplicemente stabile

$|k| > 1$ sistema instabile

$|k| = 1$?

$$k=-1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = -1$

hanno $1 \cdot 1 = 1$, molteplicità 1

autovalori semplici

$\Downarrow$

stabilità semplice

$$k=+1 \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\lambda_1 = +1$ doppio

$\lambda_2 = 0$

A è diagonalizzabile? $\longrightarrow$ sì $\Longrightarrow$ sistema semplic. stabile

$\downarrow$ no

$\Downarrow$ sistema instabile

A sia diagonalizz. deve esistere T:

$$TAT^{-1} = D = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{array}$$

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{array}\right]$$

$$\bar{v}_1 \longleftrightarrow A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 \longleftrightarrow (A - \lambda_1 I)\bar{v}_1 = 0$$

$$\bar{v}_2 \longleftrightarrow A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2 \qquad (A - \lambda_2 I)\bar{v}_2 = 0$$

$$\bar{v}_3 \longleftrightarrow A\bar{v}_3 = \lambda_3 \bar{v}_3 \qquad (A - \lambda_3 I)\bar{v}_3 = 0$$

$$\lambda_3 = 0 \Longrightarrow A\bar{v}_3 = 0 \qquad A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases} \text{ pu } \text{ es } \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_1 I)\bar{v}_1 = 0$$

$$(A-I)\bar{v}_1 = 0$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-I)\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} q = 0 \\ -q + 2r = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p \text{ qualsiasi} \\ q = 0 \\ r = 0 \end{cases}$$

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$T = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & ? & \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ? & 1 \\ 0 & & -1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

NON posso trovare $\bar{v}_2$

A non è diagonalizzabile $\Rightarrow$ prodotto $1 \cdot 1 = 1$

nei modi in A^k c'è $k(1)^k 1(k)$

Sistema INSTABILE!

per caso

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = -1 \quad (<0) \text{ quindi} \ldots$$

Stabilità del sistema?

polinomio caratteristico $\quad P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

Soluzione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} (\lambda-1) & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -2 \\ -1 & 0 & (\lambda+2) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo prima colonna

$$= (-1)^{1+1}(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)\,\lambda\,(\lambda + 2) - 2$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - 2\lambda - 2 = \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 2$$

$$= (\lambda^2 - 2)(\lambda + 1)$$

Autovalori

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}$$

$$\lambda_3 = +\sqrt{2} > 0 \leftarrow$$

sistema instabile

Dato il sistema a tempo discreto descritto dalle eq. alle differenze

$\boxed{\text{esercizio } 2}$

$$
\begin{cases}
y(k+2) = y(k+1) + y(k) \\
k \geq 0 \\
y(0) = +1 \quad y(1) = +1
\end{cases}
$$

- Portare in eq. di stato il sistema:

$$x_1(k) = y(k) \qquad x_1(k+1) = x_2(k) = y(k+1)$$

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = x_2(k) \\
x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k)
\end{cases}
\qquad y(k) = \overset{x_1(k)}{\cancel{x_2(k)}}
$$

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = x_2(k) \\
x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\
y(k) = x_{\cancel{2}}(k) \quad 1
\end{cases}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}$$
$$\quad\;\; 1 \quad 0$$

Il sistema evolve SOLO in evoluzione libera

$$x(k) = A^k x(0)$$

$$y(k) = C A^k x(0)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

$$|\lambda_{1,2}| \gtreqless 1 \rightarrow \text{blincare}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}618 \\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618 \end{cases}$$

sistema instabile!

$$\mathcal{Z}\{x(k) = A^k x(0)\} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} z \, x(0)$$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{z^2 - z - 1}_{\Delta(z)}} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{z^2}{z^2 - z - 1} \\[2ex] \dfrac{(z+1)z}{z^2 - z - 1} \end{bmatrix}$$

? $x_1(t)$ $\xrightarrow{\quad}$ $t=0$

$x_2(t)$

usare il teorema del valore iniziale

NON posso usare il teorema del valore finale

$$X_1(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \Rightarrow \frac{X_1(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

$$= \frac{C_1}{z - \alpha_1} + \frac{C_2}{z - \alpha_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$C_1 = \lim_{z \to \alpha_1} \frac{z}{\underbrace{z^2 - z - 1}_{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}} (z - \alpha_1) = \lim_{z \to \alpha_1} \frac{z}{z - \alpha_2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{10}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$C_2 = \lim_{z \to \alpha_2} \frac{z}{(z-\alpha_1)\cancel{(z-\alpha_2)}} \cancel{(z-\alpha_2)} = \frac{\sqrt{5}}{10}(\sqrt{5}+1)$$

$$X_1(z) = \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{z}{z-\alpha_1} C_1 + \frac{z}{z-\alpha_2} C_2$$

$$(\alpha_1)^k \cdot 1(k) \qquad (\alpha_2)^k \cdot 1(k)$$

$$x_1(k) = \frac{\sqrt{5}}{10}\left[(\sqrt{5}-1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + (\sqrt{5}+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \cdot 1(k)$$

$$X_2(z) = \frac{z(z+1)}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}$$

$$\frac{X_2(z)}{z} = \frac{D_1}{z-\lambda_1} + \frac{D_2}{z-\lambda_2}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}(3-\sqrt{5})\frac{1}{z-\lambda_1} + \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5})\frac{1}{z-\lambda_2}$$

$$X_2(z) = \frac{z}{z-\lambda_1} D_1 + D_2 \frac{z}{z-\lambda_2}$$

$$x_2(t) = \left[-\frac{\sqrt{5}}{10}(3-\sqrt{5}) \cdot \lambda_1^{t} + \frac{\sqrt{5}}{10}(3+\sqrt{5})\lambda_2^{t}\right] \cdot 1(t)$$

PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2013/2014

30 giugno 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐ **6 CFU** ☐ **9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Domanda 3.1. Dato l'ingresso $u(t) = 3\sin(3t) \cdot 1(t)$ ed essendo nulle le condizioni iniziali ($x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$), si determinino $x_1^{\infty}(t)$ e $x_2^{\infty}(t)$ ossia l'andamento **a regime** delle due componenti dello stato.

Domanda 3.2. Sempre per condizioni iniziali nulle, si determini l'andamento dell'uscita $y(t)$ in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = \delta(t)$.

20/6/2014

Es. 3 riprova 3.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + u \\ y = -x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = 3 \operatorname{sen}(3t) \cdot 1(t)$$

$x_{1\infty}$ $x_{2\infty}$ $x_1(t)$, $x_2(t)$ $t \to \infty$

NON si può applicare il teorema del valor finale!

movimento dello stato

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$X(s) = \cancel{(sI-A)^{-1}x(0)} + (sI-A)^{-1}B\,U(s)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U(s) = \frac{9}{s^2+9} = \mathcal{L}\left\{3\,\mathrm{sen}(3t)\,1(t)\right\}$$

$$\Rightarrow (sI-A)^{-1}B\,\frac{9}{s^2+9}$$

$$X_1(s) = \frac{2\cdot 9}{(s+1)(s+3)(s^2+9)}$$

$$X_2(s) = \frac{9}{(s+3)(s^2+9)}$$

le ipotesi del teorema del valor finale NON sono verificate!
NON si può usarlo!

$$X_1(s) = \frac{18}{(s+1)(s+3)(s^2+9)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} + \boxed{\frac{As+B}{s^2+9}}$$

$C_1 e^{-t} \cdot 1(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$C_2 e^{-3t} \cdot 1(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$\operatorname{sen} 3t \cdot 1(t)$

$\cos 3t \cdot 1(t)$

$$X_{1\infty}(s) = \frac{As+B}{s^2+9}$$

compl. quadrati

AB ho bisogno di C_1, C_3

sviluppo in fratti semplici

$$X_1(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_3}{s+3} + \boxed{\frac{C_2}{s+j3} + \frac{C_2^*}{s-j3}}$$

$$\frac{As+B}{s^2+9}$$

$$C_2 = \lim_{s \to -j3} X_1(s)\cdot(s+j3) = \lim_{s \to -j3} \frac{8}{(s+1)(s+3)(s-j3)}$$

$$= \frac{-2-j}{10}$$

$$C_2^* = \frac{-2+j}{10}$$

$$X_{1\infty}(s) = \frac{C_2}{s-j3} + \frac{C_2^*}{s+j3}$$

$$= -\frac{4s+6}{10(s^2+9)} =$$

$$= -\frac{2}{5}\,\frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{5}\,\frac{3}{s^2+9}$$

$\cos(3t)\cdot 1(t)$ $\quad\quad$ $\mathrm{sen}(3t)\cdot 1(t)$

$$x_{1\infty}(t) = \left[-\frac{2}{5}\cos(3t) - \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}(3t)\right]\cdot 1(t)$$

$$X_2(s) = \frac{9}{(s+3)(s^2+9)} = \frac{C_1}{s+3} + \underbrace{\frac{C_2}{s-j3} + \frac{C_2^*}{s+j3}}_{X_{2\infty}(s)}$$

$$\frac{C_1}{s+3} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

$$C_2 = \lim_{s\to -j3} (s+j3)\,X_2(s) = \frac{1+j}{4}$$

$$C_2^* = \frac{1-j}{4}$$

$$X_{2\infty}(s) = \frac{C_2}{s+j3} + \frac{C_2^*}{s-j3} = \frac{1}{2}\,\frac{s+3}{s^2+9} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9}\right]$$

$$x_{2\infty}(t) = \frac{1}{2}\left[\cos(3t)\cdot 1(t) + \operatorname{sen}(3t)\cdot 1(t)\right]$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos(\omega\, t) \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

PROVA SCRITTA DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2013/2014

30 giugno 2014

nome e cognome:

numero di matricola:

prova d'esame da CFU : ☐**6 CFU** ☐**9 CFU**

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

IMPORTANTE: coloro i quali sostengono la prova d'esame corrispondente a 6 CFU devono risolvere soltanto gli esercizi della PARTE 1 e barrare la PARTE 2.

Chi invece sostiene la prova d'esame corrispondente a 9 CFU deve risolvere sia gli esercizi di PARTE 1 che gli esercizi di PARTE 2.

Esercizio 4

Si supponga che il seguente sistema non lineare e scalare ($x \in \mathbb{R}$) descriva la dinamica di una reazione chimica. Con $x(t)$ si indica la quantità di materiale presente e con $u(t)$ il prelievo effettuato nell'unità di tempo;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4\,x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{5}\right) - u(t) \\ \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Domanda 4.1. Si determinino gli stati di equilibrio in caso di prelievo costante unitario ($u(t) = \bar{u} = 1 \ \ \forall t \geq 0$).

Domanda 4.2. Si determini l'espressione del sistema linearizzato in corrispondenza di tutti i punti di equilibrio calcolati nella risposta alla domanda 4.1.

Domanda 4.3. Si analizzi la stabilità di tutti i punti di equilibrio individuati nella risposta alla domanda 4.1.

Domanda 4.4. Si supponga ora che vi sia un prelievo costante $u(t) = \bar{u} > 0 \ \ \forall t$. Si dimostri che il massimo valore di $\bar{u}$ per cui il sistema ammette almeno uno stato di equilibrio in cui $\bar{x} > 0$ è

$$\bar{u}_{max} = 5.$$

20/6/14 es. 4

4.1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4\, x(t) \left[1 - \dfrac{x(t)}{5} \right] - u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

non lineare

$$u(t) = \bar{u} = +1$$

(a) stati di equilibrio

sostituisco $u(t) = \bar{u}$ e pongo $\dot{x} = 0$
per determinare i possibili stati di equilibrio

$$0 = 4\bar{x} \left[1 - \frac{\bar{x}}{5} \right] - 1$$

$\bar{x}$ ← se esiste soluzione sarà $x(t) = \bar{x}$ $\forall t \geq 0$

$$4\bar{x}\left[1-\frac{\bar{x}}{5}\right]-1=0 \quad\Rightarrow\quad 4\bar{x}^2-20\bar{x}+5=0$$

$$\bar{x}_{1,2}=\frac{+10\pm\sqrt{100-20}}{4}$$

$$\bar{x}_1=\frac{5}{2}-\sqrt{5} \qquad \bar{y}_1=\bar{x}_1$$

$$\bar{x}_2=\frac{5}{2}+\sqrt{5} \qquad \bar{y}_2=\bar{x}_2$$

per $u(t)=\bar{u}=1$
esistono 2
stati di equilibrio
distinti
(e quindi 2
uscite di equilibrio)

risposta 4.2 | va determinata l'espressione del sistema linearizzato

$$\dot{x}(t) = f(x, u)$$
$$= 4x(t) - \frac{4}{5}x^2(t) - u(t)$$

1 sola variabile (scalare) di stato: è matrice 1×1

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = 4 - \frac{8}{5}\bar{x}$$

1 variabile di stato scalare ed 1 solo ingresso ⇒ è scalare

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=\bar{u}} = -1$$

1 sola uscita ed 1 variabile di stato scalare

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = +1$$ ← matrice 1×1

$$D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u=\bar{u}} = 0$$ ← matrice 1×1

In definitiva:

Dato $\bar{x}_1$ di eq. $\Longrightarrow$

$$A_1 = 4 - \frac{8}{5}\left(\frac{5}{2} - \sqrt{5}\right) = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

$$B_1 = -1$$

$$C_1 = +1$$

$$D_1 = 0$$

Dato di eq $\bar{x}_2$ $\Longrightarrow$

$$A_2 = 4 - \frac{8}{5}\left[\frac{5}{2} + \sqrt{5}\right] = -\frac{8}{5}\sqrt{5}$$

$$B_2 = -1$$

$$C_2 = +1$$

$$D_2 = 0$$

risposta 9.3

per analizzare la stabilità degli stati di equilibrio analizzo gli autovalori delle matrici A_1 ed A_2 che corrispondono ai 2 stati di equilibrio

Le matrici sono $(1\times 1) \rightarrow$ il valore è anche l'autovalore della matrice

stato di equilibrio $\bar{x}_1$

$$A_1 = +\frac{8}{5}\sqrt{5} \Longrightarrow \lambda_1 = +\frac{8}{5}\sqrt{5} > 0$$

$\bar{x}_1$ stato di equilibrio instabile

stato di equilibrio $\bar{x}_2$

$$A_2 = -\frac{8}{5}\sqrt{5} \Longrightarrow \lambda = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$$

$\bar{x}_2$ stato di eq. stabile

risposta 1.4

per $u(t) = \bar{u}$ (con $\bar{u}$ prefissato) gli stati di equilibrio sono le soluzioni di

$$4\bar{x} - \frac{4}{5}\bar{x}^2 - \bar{u} = 0$$

cioè

$$4\bar{x}^2 - 20\bar{x} + 5\bar{u} = 0$$

Al variare di $\bar{u}$, varia il discriminante Δ e così pure gli stati di equilibrio:

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20\bar{u}}}{4}$$

$$\Delta = 20(5 - \bar{u})$$

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20\bar{u}}}{4}$$

se $\Delta > 0$ entrambe le soluzioni (stati di equilibrio) sono reali e positive

$\bar{u} > 0$ ⟺ $\Delta > 0$ ⟺ $0 < \bar{u} < 5$

se $\Delta = 0$ soluzioni coincidenti (uno stato di equilibrio) reali e positive

$\Delta = 0$ ⟺ $\bar{u} = 5$

se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni (stati di equilibrio) reali → l'equazione ha soluzioni complesse

In definitiva c'è almeno uno stato di equilibrio reale positivo per

$0 < \bar{u} \le 5$