Trasformazione bilineare
per lo studio di stabilità
per sistemi LTI a tempo discreto

Casi particolari ed esempi

Trasformazione bilineare per lo studio di stabilità per sistemi LTI a tempo discreto

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$z \in \mathbb{C}$

$w \in \mathbb{C}$

$w = 1 \longleftrightarrow z = ?$

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

$z = 1 \longleftrightarrow w = ?$

trasf. bilineare su Bolzern Scattolini Schiavoni

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$z = \frac{aw+b}{cw+d}$$

$z, w \in \mathbb{C}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

trasf. bilineari

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = -\left(\frac{1+w}{w-1}\right) = -\frac{w+1}{w-1}$$

differiscono per un segno

Tabella di Routh

criterio di R-H

il n° di variazioni e/o permanenze di segno in I^a colonna della tabella costruita a partire dal polinomio trasformato $q(w)$ NON CAMBIA

1° esempio

$$P(z) = z^2 - z - 1$$

$$P(z) = 0 \iff \begin{aligned} z_1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}618 \\ z_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618 \end{aligned}$$

$$|z_2| > 1 \longrightarrow$$

sistema instabile!

trasf. bilineare

$$z^2 - z - 1 = 0 \Longleftarrow z = \frac{w+1}{w-1} \qquad \left(z = \frac{1+w}{1-w} \right)$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - \left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 1 = 0 \Big/ (w-1)^2$$

$$(w+1)^2-(w+1)(w-1)-(w-1)^2=0$$

$$w^2-4w-1=0 \qquad q(w)=w^2-4w-1$$

tabella di Routh

$$\begin{array}{cc|cc} & 2 & +1 & -1 \\ 1v \downarrow & & & \\ & 1 & -4 & \\ 1p \downarrow & & & \\ & 0 & -1 & \end{array}$$

$1v \Longleftrightarrow$ esiste una radice $\bar q$ di $q(w)$ che ha $Re>0$

$\Updownarrow$

a $\bar q$ corrisponde una radice $\bar z$ (di $p(z)$) tale che $|\bar z|>1$

SISTEMA INSTABILE!

Trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

Casi particolari

Casi particolari

ⓐ $p(z)$ possiede una radice in $z=-1$

$$p(z) = (z+1)^2 (z+10)$$

$\longrightarrow z_2 = -10 \quad |z_2| > 1$ INST.

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1} + 1\right)^2 \left(\frac{w+1}{w-1} + 10\right) = 0 \quad \Big/ \; (w-1)^3$$

$$4w^2(11w-9) = 0 \qquad q(w) = 4w^2(11w-9)$$

radice doppia in $w=0$ $\Longleftrightarrow$ c'è radice doppia in $z=-1$ per $p(z)$

$$q(w) = 4w^2(11w - 9)$$

$$\updownarrow$$

$$w = \frac{9}{11} > 0$$

$P(z)$

$$q(w) \longrightarrow \begin{cases} \text{radice doppia in } w=0 \\ \text{radice con } \mathrm{Re}>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{radice doppia in } z=-1 \\ z_3 : |z_3| > 1 \end{cases}$$

Ad ogni radice di $q(w)$ in $w=0$ corrisponde una radice di $P(z)$ in $z=-1$ (con la stessa molteplicità)

Proprietà della trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$p(z) \longleftrightarrow q(w)$$

Ad ogni radice di $q(w)$ in $w=\infty$ corrisponde una radice di $p(z)$ in $z=-1$ (con la stessa molteplicità)

Caso particolare

ⓑ $P(z)$ possiede una radice in $z = +1$

$$P(z) = (z-1)^2\left(z + \frac{1}{2}\right) \leftarrow \text{radice doppia in } z = +1$$

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1} - 1\right)^2\left(\frac{w+1}{w-1} + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Big/ (w-1)^3$$

$$3w + 1 = 0 \leftarrow g(w) = 3w+1$$

grado 1

il polinomio $g(w)$ non ha il grado del polinomio $p(z) \Rightarrow g(w)$ si abbassa di grado. La perdita coincide con la molteplicità della radice $z=+1$ di $p(z)$.

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\begin{tikzcd} p(z) \arrow[rr, bend left] & & g(w) \end{tikzcd}$$

$p(z)$ ha radice con molteplicità 2 in $z=+1$

$$(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right) \qquad\qquad 3w+1$$

$$\Uparrow$$

grado 3 $\Rightarrow$ $3-1 = 2$ $\Leftarrow$ grado 1

Proprietà della trasformazione bilineare

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\begin{tikzcd} p(z) \arrow[r, leftrightarrow] & q(w) \end{tikzcd}$$

polinomio di grado n_p ⟷ polinomio di grado n_q

- se $n_p = n_q$ allora $p(z)$ non ha alcuna radice in $z = +1$
- se $n_q < n_p$ allora $p(z)$ ha radice in $z = +1$ con molteplicità $n_p - n_q$

Esempio:

studio di stabilità di un sistema LTI a tempo discreto al variare di un parametro

Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) - 2x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) - \gamma\, x_2(k) \\ x_3(k+1) = -2x_1(k) + \gamma\, x_2(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases}$$

$\gamma \in \mathbb{R}$

Come varia la stabilità al variare di γ?

- determinare la matrice A delle eq di stato
- determinare $p(z) = \det(zI - A)$
- studiare $p(z)$

trasf. bilineare + criterio R.H.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -\gamma & 0 \\ -2 & +\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3}$?

$\det A = ?$

colonna tutta nulla

↓

$\det A = 0$

↓

$\lambda_1 = 0$ c'è autovalore nullo

$$p(t) = \det(zI - A)$$

$$= \begin{vmatrix} z-2 & 2 & 0 \\ -2 & z+\gamma & 0 \\ 2 & -\gamma & z \end{vmatrix} =$$

$$= z \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} z-2 & 2 \\ -2 & z+\gamma \end{vmatrix} = z\left[z^2 + (\gamma-2)z + 2(2-\gamma)\right]$$

il resto di
ricavo solo
2 autovalori

↓

Per studiare la stabilità è sufficiente studiare

$$\tilde{p}(z) = z^2 + (\gamma - 2) z + 2(2 - \gamma)$$

L'ultimo autovalore ($z_3 = 0$) resta FISSO al variare di γ.

$$z^2 + (\gamma - 2) z + 2(2 - \gamma) = 0 \quad \leftarrow \quad z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (\gamma - 2)\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 2(2 - \gamma) = 0 \quad \Big/ (w-1)^2$$

Sviluppo e raccolgo

$$(3 - \gamma) w^2 + 2(2\gamma - 3) w + (7 - 3\gamma) = 0$$

$$(3-\gamma)w^2+2(2\gamma-3)w+(7-3\gamma)=0$$

$\gamma=3 \Rightarrow$? $\gamma=3/2$? $\gamma=7/3$?

come cambia il polinomio per questi valori di γ?

②	$(3-\gamma)$	$(7-3\gamma)$
①	$2(2\gamma-3)$	$\gamma\neq 3/2$
⓪	$(7-3\gamma)$	

il n° di variazioni / permanenze dipende da γ

altrimenti si annulla tutta una riga della tabella → per $\gamma=3/2$ studio a parte

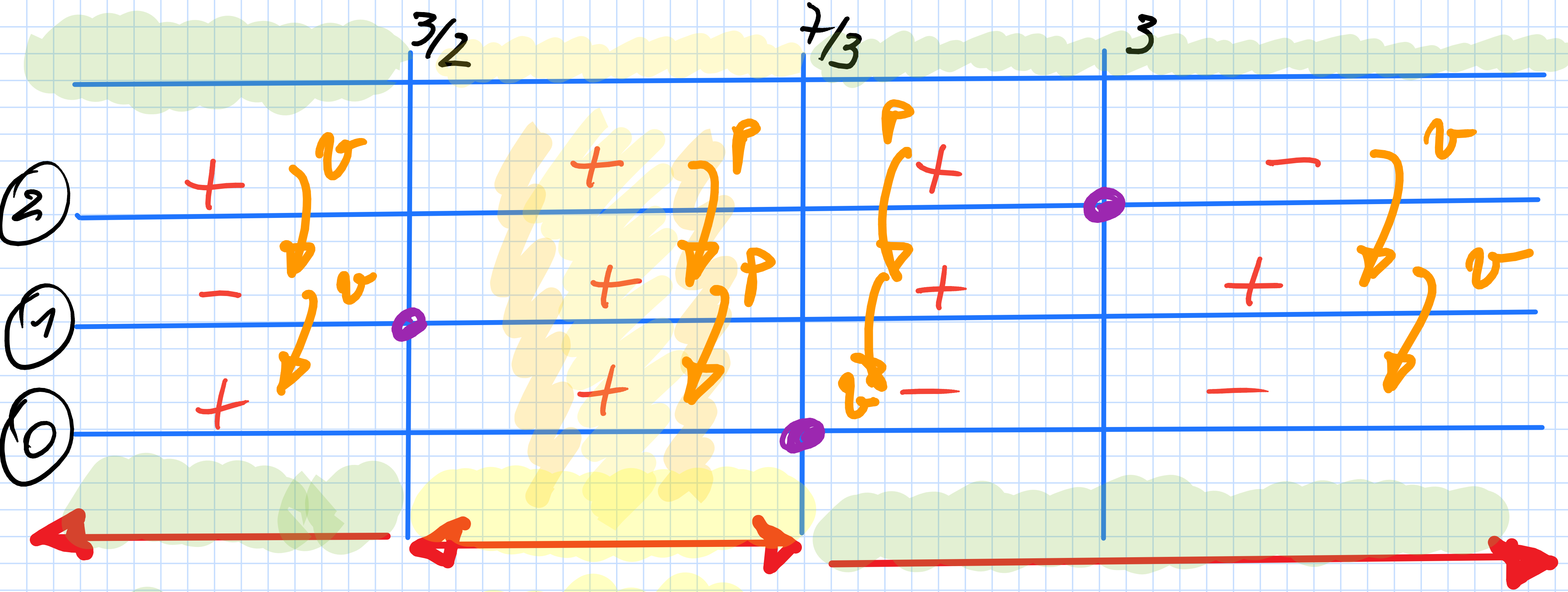
Studio del segno dei coeff. in 1ª colonna della tabella di Routh

$$3-\gamma \geq 0 \longleftrightarrow \gamma \leq 3$$ ②

$$2\gamma-3 \geq 0 \longleftrightarrow \gamma \geq 3/2$$ ①

$$7-3\gamma \geq 0 \longleftrightarrow \gamma \leq 7/3$$ ⓪

Adesso bisogna determinare il n° di variazioni e permanenze di segno in 1ª colonna della tabella di Routh



$\gamma < 3/2$

2 variazioni!

↕

Instabilità

$3/2 < \gamma < 7/3$

2 permanenze

↕

stabilità asintotica

$\gamma > 7/3$

almeno 1 variazione!

↕

Instabilità

$\gamma = 7/3 \rightarrow q(w)$ $\begin{cases} w = 0 \\ w = 5 \end{cases} \Rightarrow \overset{2}{p}(z)$ $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 : |z_2| < 1 \end{cases}$

sostituisco γ e calcolo le radici di $q(w)$

$$p(z) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_0 = 0 \\ z_1 = -1 \\ z_2 : |z_2| < 1 \end{array}\right\}$$ SEMPL. STAB.

$\gamma = 3/2 \Rightarrow q(w)$ 2 radici imm. pure

sostituisco γ e calcolo le radici di $q(w)$

$$\frac{3}{2} w^2 + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \pm j \frac{\sqrt{15}}{3}$$

2 radici con $\mathrm{Re} = 0$ in w $\Longrightarrow$ SEMPL. STAB.
semplici

$\longleftrightarrow$ 2 radici in z t.c. $|z| = 1$

Per completezza (anche se già si può concludere che il sistema è instabile)

per $\gamma = 3$ → $q(w)$ si abbassa di grado!

↓

$\tilde{p}(z)$ ha una radice in $z = +1$ con molteplicità 1

$q(w)$, $\gamma = 3$ $\Longrightarrow$ radice $\bar{w}$: $\bar{w} > 0$

↳ l'altra radice di $\tilde{p}(z)$ ha modulo > 1 $\Longrightarrow$ INST.

Calcolo di e^{At}

utilizzando la

trasformata di laplace

Dato il sistema LTI descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + 3u \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = ?$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$tr(A) = 1 + 0 + 1 = 2 > 0 \Rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

Tra i termini di e^{At} almeno uno deve $\to \infty$ quando $t \to +\infty$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} (s-1) & -1 & 0 \\ 0 & s & -2 \\ -1 & 0 & (s-1) \end{bmatrix} \longleftarrow$$

per calcolare
il determinante
per es. sviluppo
lungo prima
riga

percorso ⇒ scegliere altra riga o
colonna per il calcolo
del determinante

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \left[c_{ij} \right]^{T}$$

$$c_{ij} \leftrightarrow (-1)^{i+j} \det\left[\hat{A}_{ij} \right]$$

compl. algebrici

Sviluppando il calcolo lungo la riga evidenziata

$$\det(sI-A) = (-1)^{1+1}(s-1)\begin{vmatrix} s & -2 \\ 0 & s-1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & s \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= s^3-2s^2+s-2 = (s-2)(s+j)(s-j)$$

sistema instabile

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} s & -2 \\ 0 & (s-1) \end{vmatrix} = s(s-1)$$

elemento della matrice dei complementi algebrici

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = +2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & s \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = s$$

$c_{21} = s-1$ $\quad c_{22} = (s-1)^2$ $\quad c_{23} = +1$

$c_{31} = +2$ $\quad c_{32} = 2(s-1)$ $\quad c_{33} = s(s-1)$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s(s-1) & +2 & s \\ (s-1) & (s-1)^2 & 1 \\ 2 & 2(s-1) & s(s-1) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s-j)(s+j)} \begin{bmatrix} s(s-1) & (s-1) & +2 \\ +2 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ s & +1 & s(s-1) \end{bmatrix}$$

Ora si tratta di antitrasformare tutti i termini

Ad esempio

$$[\quad]_{1,2} = \frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)} \longrightarrow$$ sviluppo in fratti semplici

$$\frac{C_1}{s-2} + \frac{C_2}{s-j} + \frac{C_2^*}{s+j}$$

$\swarrow$ completamento dei prodotti

$$\frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

per casa: provare entrambe le tecniche

Soluzione completa di

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$t \cdot e^{\alpha\, t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\sin{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t \cdot \sin{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\, s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$t \cdot \cos{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \sin{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$e^{\sigma\, t} \cdot \cos{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{s-\sigma}{\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \sin{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{2\,\omega\,(s-\sigma)}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$
$t \cdot e^{\sigma\, t} \cdot \cos{(\omega\, t)} \cdot 1(t)$	$\frac{\left(s-\sigma\right)^2-\omega^2}{\left[\left(s-\sigma\right)^2+\omega^2\right]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)(s-j)(s+j)} \begin{bmatrix} s(s-1) & (s-1) & +2 \\ +2 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ s & +1 & s(s-1) \end{bmatrix}$$

elemento (1,1)

$$\left[e^{At}\right]_{(1,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right]$$

sviluppo in fratti semplici

$$\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-j} + \frac{B^*}{s+j}$$

$$A = \lim_{s\to 2} \frac{s(s-1)}{\cancel{(s-2)}(s^2+1)} \overset{1}{\cancel{(s-2)}} = 2/5$$

$$B = \lim_{s\to j} \frac{s(s-1)}{(s-2)\underset{1}{\cancel{(s-j)}}(s+j)} \overset{1}{\cancel{(s-j)}} = \frac{1}{10}(3-j)$$

$$B^* = \frac{1}{10}(3+j)$$

$$\begin{cases} \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} = \cos t \\ \dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{..\} = \Big[\frac{2}{5}e^{2t} + \underbrace{\frac{1}{10}(3-j)e^{jt} + \frac{1}{10}(3+j)e^{-jt}}_{2\cdot\frac{3}{10}\frac{(e^{jt}+e^{-jt})}{2} - \frac{j}{10}\frac{(e^{jt}-e^{-jt})}{2j}\cdot 2j}\Big]\cdot 1(t)$$

$$\left[e^{At}\right]_{(1,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\} =$$

$$= \left[\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,t\right]\cdot 1(t)$$

elemento (1,2)

$$\left[e^{At}\right]_{(1,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

← utilizzo il "completamento di quadrato"

$$\frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = \lim_{s\to 2} \frac{(s-1)}{\underset{1}{\cancel{(s-2)}}(s^2+1)} \cdot \overset{1}{\cancel{(s-2)}} = \frac{1}{5}$$

sostituisco e cerco gli altri coeff. col principio di identità dei polinomi

$$(s-1) = \tfrac{1}{5}(s^2+1) + (s-2)(Bs+C)$$

$$s-1 = \left(\frac{1}{5}+B\right)s^2 + (C-2B)s + \left(\frac{1}{5}-2C\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}+B = 0 \\ C-2B = 1 \\ \frac{1}{5}-2C = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -\frac{1}{5} \\ C = 1+2B = 3/5 \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} - 6/5 = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right] = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+1}\right]$$

per la linearità di $\mathcal{L}\{\cdot\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}\cdot 1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2+1}\right] = \overbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1^2}\right]}^{\cos t\cdot 1(t)} - 3\overbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1^2}\right]}^{\mathrm{sen}\, t\cdot 1(t)} = \left[\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t\right]\cdot 1(t)$$

$$\left[e^{At}\right]_{(1,2)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\,\mathrm{sen}\,t\right]\cdot 1(t)$$

elemento (1,3)

$$\left[e^{At}\right]_{(1,3)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad \circledast$$

È l'approccio più conveniente in questo caso!

$$A = \lim_{s \to 2} \frac{2}{\underset{1}{\cancel{(s-2)}}(s^2+1)} \overset{1}{\cancel{(s-2)}} = 2/5$$

applico il principio di identità dei polinomi ai polinomi a numeratore nell'espressione ⊛

$$2 = \frac{2}{5}s^2 + \frac{2}{5} + Bs^2 + Cs - 2Bs - 2C$$

$$= \left(\frac{2}{5} + B\right)s^2 + (C - 2B)s + \left(\frac{2}{5} - 2C\right)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5} + B = 0 \\ C - 2B = 0 \\ \frac{2}{5} - 2C = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -2/5 \\ C = 2B = -4/5 \\ 2/5 + 8/5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -2/5 \\ C = -4/5 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} +$$

$$- \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$$

per linearità

$$\left[e^{At}\right]_{(1,3)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$= \left[\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t\right]\cdot 1(t)$$

elemento (2,1)

$$\left[e^{At}\right]_{(2,1)} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

come elemento (1,3)

$$= \left[\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,t\right] \cdot 1(t)$$

elemento (2,2)

$$\left[e^{At}\right]_{2,2} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)^2}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$\frac{(s-1)^2}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

uso ancora lo stesso approccio!

$$A = \lim_{s \to 2} \frac{(s-1)^2}{\underset{1}{\cancel{(s-2)}}(s^2+1)} \cdot \overset{1}{\cancel{(s-2)}} = \frac{1}{5}$$

$$(s-1)^2 = \frac{1}{5}(s^2+1) + (Bs+C)(s-2)$$

$$s^2-2s+1 = \left(\frac{1}{5}+B\right)s^2 + (C-2B)s + \left(\frac{1}{5}-2C\right)$$

$$\begin{cases} B+1/5 = 1 \\ C-2B = -2 \\ 1/5 - 2C = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 4/5 \\ C = -2/5 \\ 1/5 + 4/5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 4/5 \\ C = -2/5 \end{array}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)^2}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} +$$

$$-\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$$

per linearità

$$\left[e^{At}\right]_{2,2} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)^2}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\right]\cdot 1(t)$$

Elemento (2,3)

$$\left[e^{At}\right]_{2,3} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$\frac{2(s-1)}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

come negli altri casi

$$A = \lim_{s\to2} \frac{2(s-1)}{\underset{1}{\cancel{(s-2)}}(s^2+1)}\overset{1}{\cancel{(s-2)}} = 2/5$$

confronto i polinomi e numeratori ed applico il principio di identità dei polinomi per determinare i coefficienti B, C

$$2s-2 = \frac{2}{5}(s^2+1)+(Bs+C)(s-2)$$

$$2s-2 = \left(\frac{2}{5}+B\right)s^2+(C-2B)s+\left(\frac{2}{5}-2C\right)$$

$$\begin{cases} B + 2/5 = 0 \\ C - 2B = 2 \\ 2/5 - 2C = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2/5 \\ C = 2 + 2B = 6/5 \\ \frac{1}{5} - 6/5 = -1 \end{cases}$$

quindi per linearità

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} + \\ + 6/5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$$

$$\left[e^{At}\right]_{2,3} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$= \left[\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{6}{5}\operatorname{sen} t\right]\cdot 1(t)$$

elemento $(3,1)$

$$\left[e^{At}\right]_{3,1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

stesso approccio degli altri casi

$$\frac{s}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = \lim_{s \to 2} \frac{s}{\cancelto{1}{(s-2)}(s^2+1)} \cdot \cancelto{1}{(s-2)} = 2/5$$

applico il principio di identità dei polinomi ai polinomi a numeratore

$$s = \frac{2}{5}(s^2+1) + (Bs+C)(s-2)$$

$$s = \left(\frac{2}{5}+B\right)s^2 + (C-2B)s + \left(\frac{2}{5}-2C\right)$$

$$\begin{cases} B + 2/5 = 0 \\ C - 2B = 1 \\ \frac{2}{5} - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2/5 \\ C = 1 + 2B = 1/5 \\ 2/5 - 2/5 = 0 \end{cases}$$

quindi per linearità:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$$

$$\left[e^{At}\right]_{3,1} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ \right\} = \left[\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right] \cdot 1(t)$$

elemento (3,2)

$$[e^{At}]_{3,2} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

provare ad utilizzare l'altro approccio, usando lo sviluppo in fratti semplici

$$\frac{1}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A = \lim_{s\to 2} \frac{1}{\underset{1}{\cancel{(s-2)}}(s^2+1)}\overset{1}{\cancel{(s-2)}} = 1/5$$

applica il principio di identità dei polinomi

$$1 = \frac{1}{5}(s^2+1) + (Bs+C)(s-2)$$

$$1 = \left(\frac{1}{5}+B\right)s^2 + (C-2B)s + \left(\frac{1}{5}-2C\right)$$

$$\begin{cases} B + \frac{1}{5} = 0 \\ C - 2B = 0 \\ \frac{1}{5} - 2C = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -1/5 \\ C = -2/5 \\ 1/5 + 4/5 = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s-2)\,(s^2+1)} \right\} = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{s^2+1^2} \right\} +$$

$$-2/5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2+1^2} \right\}$$

$$\left[e^{At}\right]_{32} = \mathcal{L}^{-1}\{\,\bullet\,\} = \left[\frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\right]\cdot 1(t)$$

elemento (3,3)

$$\left[e^{At}\right]_{3,3} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\}$$

$$\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Come negli altri casi trovo A con la formula dei residui, B e C con il principio di identità dei polinomi

$$A = \lim_{s \to 2} \frac{s(s-1)}{\cancel{(s-2)}(s^2+1)} \cdot \cancel{(s-2)} = 2/5$$

$$s^2 - s = 2/5\,(s^2+1) + (Bs+C)(s-2)$$

$$s^2 - s = \left(\frac{2}{5} + B\right)s^2 + \left(C - 2B\right)s + \left(\frac{2}{5} - 2C\right)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5} + B = +1 \\ C - 2B = -1 \\ \frac{2}{5} - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3/5 \\ C = 1/5 \\ \frac{2}{5} - 2/5 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(s-1)}{(s-2)(s^2+1)}\right\} = \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1^2}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1^2}\right\}$$

$$\left[e^{At}\right]_{3,3} = \mathcal{L}^{-1}\{\vdots\} = \left[\frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t\right] \cdot 1(t)$$