Criterio di Routh-Hurwitz: casi particolari proprietà utili

① $s^6+2s^5+5s^4+12s^3+7s^2+4s+3=0$

6	1	5	7	3
5	2	12	4	
4	-1	5	3	
3	22	10		
2	60/11	3		

$$-\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 12\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 12\\ 1 & 5\end{vmatrix}$$

$$=(2\cdot 5-12\cdot 1)/2=-1$$

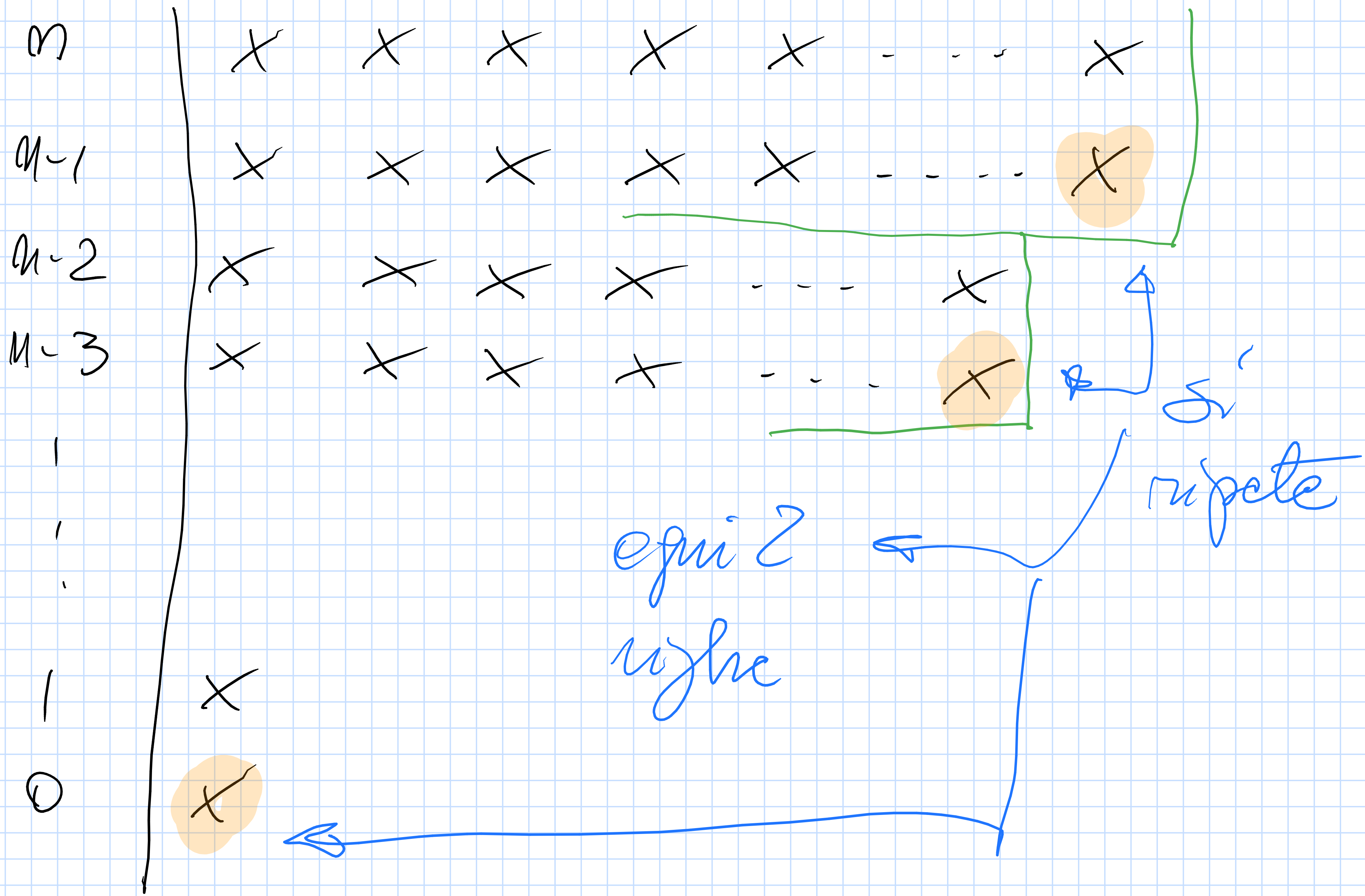
3	22	10
2	60/11	3
1	-21/10	
0	3	

	+	6	1	5	7	3
P	+	5	2	12	9	
V	−	4	-1	5	3	
V	+	3	22	10		
P	+	2	60/11	3		
V	−	1	-21/10			
V	+	0	3			

2 permanenze di segno
↓
2 radici $Re<0$

4 variazioni di segno
↓
4 radici a parte reale positiva

il polinomio è associato ad un sistema instabile n dispari → (n+1) coeff.



n poli → (n+1) coeff

$$
\begin{array}{c|cccccc}
n & \times & \times & \times & \cdots & \times & \times \\
n-1 & \times & \times & \times & \cdots & \times & \\
n-2 & \times & \times & \times & \cdots & \times & \\
n-3 & \times & \times & \times & \cdots & \times & \\
\vdots & & & & & & \\
1 & \times & & & & & \\
0 & \times & & & & &
\end{array}
$$

Si ripete ogni 2 righe

Proprietà della Tabella R-H

- tutti gli elementi di una riga della Tabella di R-H possono essere moltiplicati per uno stesso numero POSITIVO senza che il numero di variazioni e/o permanenze di segno della tabella subisca variazioni

⇒ posso evitare di dividere nel calcolo di ciascun coeff della tabella, ma DEVO TENER CONTO del segno del divisore es. $p(s) = 4s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1$

+	4	4	5	1
+	3	3	2	
+	2	7	3	
+	1	5		
+	0	3		

$-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

non divido per 3

non divido per 3

non divido per 7

radici Re<0

solo permanenze di segno

es. $p(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$

+	4	2	3	10
+	3	1	5	
−	2	−7	+10	
+	1	+45		
+	0	+10		

non divido per (−7) MA tengo conto del segno di (−7)

2p 2v

2 radici Re > 0

2 radici Re < 0

+	6	1	5	7	3
+	5	2	12	4	
−	4	−2	10	6	
+	3	+44	+20		
+	2	+480	+264		
−	1	−2016			
+	0	532224			

4v

2p

Casi critici

(a) elemento nullo in 1ª colonna

(b) tutta una riga nulla

l'algoritmo non può continuare

le strategie di soluzione sono differenti nei 2 casi

$\boxed{\text{caso } 2}$

sostituire l'elemento nullo in 1ª colonna con un valore "ε" [$\in \mathbb{R}$] piccolo, DOTATO DI SEGNO

$0 \leftarrow +\varepsilon$

$ \leftarrow -\varepsilon$

si prosegue con la tabella e si tiene conto del segno degli elementi in 1ª colonna in funzione del segno di ε

$$P(s) = s^3 + 3s - 2$$

non completo
coeff. hanno segni ≠

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{array}$$

$+\varepsilon$

$$\begin{array}{cc|cc} + & 3 & 1 & 3 \\ + & 2 & +\varepsilon & -2 \\ + & 1 & 3\varepsilon+2 & \\ - & 0 & -2 & \end{array}$$

$$-\frac{1}{+\varepsilon}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ +\varepsilon & -2 \end{vmatrix}$$

3 radici Re<0
1 radice Re>0

2P
1V

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3 \\
2 & 0 & -2 \\
1 & & \\
0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
+3 & 1 & 3 \\
-2 & -\varepsilon & -2 \\
-1 & 3\varepsilon-2 & \\
-0 & -2 &
\end{array}
$$

IV

2p

$$
-\begin{vmatrix} -\varepsilon & -2 \\ 3\varepsilon-2 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{(3\varepsilon-2)} \Leftarrow -\frac{1}{(-\varepsilon)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -\varepsilon & -2 \end{vmatrix}
$$

$$
\frac{(-2)\cancel{(3\varepsilon-2)}}{\cancel{(3\varepsilon-2)}}
$$

caso b

si annulla una intera riga

m	x	x	x	x	...	x
$m-1$	x	x	x	x	..	x
$\vdots$	.	. .	. . .	. .		
$2m$	a	b	c	...		non tutti nulli $(\neq 0)$
$2m-1$	0	0	0	..	0	~~riga~~ di indice dispari

polinomio ausiliario

$$\tilde{p}(s) = a s^{2m} + b s^{2m-2} + c s^{2m-4} + \dots$$

polinomio costituito da monomi con potenze "pari"

Si dimostra che $\tilde{p}(s)$ è un fattore del polinomio di partenza e contiene TUTTE le radici del polinomio di partenza $p(s)$ che sono simmetriche rispetto all'origine

$$\overset{n}{p}(s) = \tilde{p}(s) \cdot q(s)$$

pol. ausiliario $\# 2m$

polinomio originale

polin. quoziente

studiare $q(s)$ $\# n-2m$ R-H

studiare $\tilde{p}(s)$ R-H

fattorizzare $\tilde{p}(s)$

fattorizzare $q(s)$ $\Longrightarrow$ Re<0 ? Re>0 ?

Strategia alternativa

$P(s) \leftarrow$ Tabella RH

$\downarrow$

$$\tilde{P}(s) = a\, s^{2m} + b\, s^{2m-2} + \dots$$

$$P_f(s) = \frac{d\tilde{P}}{ds} \leftarrow$$ sostituisco i coeff. di questo polinomio alla riga tutta nulla

$\downarrow$

procedo con la tabella

es. $p(s) = s^6 + 3s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 12s + 8$

$+$ 6	1	6	12	8
$+$ 5	3	12	12	
$+$ 4	2	8	8	
3	0	0	0	
2				

$2p$ — $q(s)$ ha 2 radici $Re<0$

$\tilde{p}(s) = 2s^4 + 8s^2 + 8$ — polinomio ausiliario

riga tutta nulla

$p(s) = 2(s^4 + 4s^2 + 4) \cdot q(s)$

$$s^4 + 4s^2 + 4 = 0$$

$$(s^2+2)^2 = 0$$

$$s_{12} = s_{34} = \pm j\sqrt{2}$$ radici a parte reale nulla

$(s+1)(s+2)$

Riassumendo: $p(s) = \underbrace{\tilde{p}(s)}_{} \cdot \underbrace{q(s)}_{}$

4 radici $Re = 0$ (2 doppie)

2 radici $Re < 0$

Conclusione → il sistema di anello $P(s)$ è
poli nei coeff. ... è
esintoticamente stabile

per decidere tra instabilità e stab. semplice
è necessario avere la matrice A dello
sp di stato e provare a portarla in forma
diagonale

se A è diagonalizzabile → stab semplice

se non lo è → instabilità

2° esercizio

solo permanenze di segno

+	6	1	6	12	8
+	5	3	12	4	
+	4	2	8	8	
+	3	8	16		
+	2	2	4		
+	1	$\cancel{0}$ 4			
+	0	4			

$$\tilde{P}(s) = 2s^4 + 8s^2 + 8$$

$$P_1(s) = 8s^3 + 16s$$

$$\tilde{P}_b = 2s^2 + 4$$

$$P_2(s) = \frac{d}{ds}\tilde{P}_b = 4s$$

Solo permanenze di segno

\+

polinomio ausiliario
(riga tutta nulla)

NON ci sono radici con Re > 0

NON tutte le radici hanno Re < 0

NON è instabile!