Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

3ª parte

Trasformate notevoli

- **Impulso unitario**

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{\delta(k)\} = 1$$

- **Scalino unitario**

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{1(k)\} = \frac{z}{z-1}$$

Dimostrazione

Serie geometrica

$$\mathcal{Z}\{1(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Rampa

$$x(k) = \begin{cases} k & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Dimostrazione

$\boxed{\text{Differenziazione complessa}}$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, z^{-k} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$\hookrightarrow \mathcal{Z}\left\{k \cdot 1(k)\right\}$

- **Segnale polinomiale**

$$x(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{(z-1)}\right]$$

Dimostrazione

Differenziazione complessa *n* volte

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n z^{-k} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{z}{z-1}\right]$$

Dimostrazione (cenni – continua)

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{k\left(k\left(k\left(\cdots\left(k\cdot 1\right)\right)\right)\right)}_{n \text{ volte}} z^{-k}$$

$$= \underbrace{\left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\cdots\left(-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]\right)\right)\right)}_{n \text{ volte l'operatore } -z\frac{d}{dz}}$$

Esempio

$$\mathcal{Z}\left\{k^2\cdot 1(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$$

$\mathcal{Z}\left\{k\left[k\cdot 1(k)\right]\right\}$

Potenza con esponente intero

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-a)}$$

Dimostrazione

$$\frac{z}{a} \triangleq \eta$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^k 1(k)\right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \frac{\eta}{(\eta - 1)} = \frac{z}{(z-a)}$$

Esponenziale

$$x(k) = \begin{cases} e^{ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-e^a)}$$

Segnali sinusoidali

$$x(k) = \sin(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z \sin\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

$$\sin(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \qquad \cos(\omega k) = \frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2}$$

$$x(k) = \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{\left(z^2 - 2z\cos\omega + 1\right)}$$

- **Segnali "composti"**

$$x(k) = a^k \sin(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{az \sin\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

$$x(k) = a^k \cos(\omega k)\, 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z^2 - az\cos\omega}{\left(z^2 - 2az\cos\omega + a^2\right)}$$

Polinomio fattoriale di ordine *n*

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} 1(k)$$

con

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(n)}}{n!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} & \text{per} \quad n > 0,\ k \geq n \\ 0 & \text{per} \quad n > 0,\ k < n \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$x(k) = \binom{k}{n} \cdot 1(k) \qquad \mathcal{Z}\left[x(k)\right] = \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

con

$$\binom{k}{n} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} & \left[\begin{array}{l}\text{per } n > 0 \\ k \geq n\end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } n = 0] \end{cases}$$

Cenni di dimostrazione

$$x(k) = \binom{k}{1} \cdot 1(k) = k \cdot 1(k) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \binom{k}{2} \cdot 1(k) = \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(k)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} - \mathcal{Z}\{k \cdot 1(k)\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^3}$$

$$x(k) = \binom{k}{3} \cdot 1(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$

$$= \left(\frac{1}{6} k^3 - \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{3} k \right) \cdot 1(k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}\left\{x(k)\right\} = \frac{1}{6} \mathcal{Z}\left\{k^3 \cdot 1(k)\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{Z}\left\{k^2 \cdot 1(k)\right\} + \frac{1}{3} \mathcal{Z}\left\{k \cdot 1(k)\right\}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{z\left(z^2 + 4z + 1\right)}{(z-1)^4} - \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^4}$$

Polinomio fattoriale di ordine *n* pesato da potenza con esponente intero

$$x(k) = \frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n} 1(k)$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

Cenni di dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k}\right]$$

Traslazione in frequenza

Polinomio fattoriale

$$\mathcal{Z}\left[\frac{k^{(n)}}{n!} a^{k-n}\right] = \frac{1}{a^n} \frac{z\, a^{-1}}{\left(z\, a^{-1} - 1\right)^{n+1}} = \frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$k^2 \cdot 1(k)$	$\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$k \cdot a^k \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$
$\sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z \sin\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$\cos(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - z\,\cos\omega}{z^2 - 2z\,\cos\omega + 1}$
$a^k \cdot \sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{a\,z \sin\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$a^k \cdot \cos(\omega\, k) \cdot 1(k)$	$\dfrac{z^2 - a\,z\,\cos\omega}{z^2 - 2\,a\,z\,\cos\omega + a^2}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{k\,(k-1)}{2} \cdot a^{k-2} \cdot 1(k-2)$	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$

Tabella 2: Segnali e corrispondenti Z-trasformate

La Z-antitrasformata

La Z-antitrasformata della funzione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

è definita come la sequenza

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} F(z)\, dz$$

in cui Γ è una curva chiusa contenuta nella regione di convergenza.

Si consideri una classe particolare di funzioni $X(z)$, ovvero le funzioni

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

dove assumiamo $m \leq n$ ovvero

$$X(z) = K \frac{(z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \ldots (z-z_r)^{m_r}}{(z-p_1)^{n_1} (z-p_2)^{n_2} \ldots (z-p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = m,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$$

$z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ zeri ,

$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}$ poli

Tecniche di Z anti-trasformazione

- Tecniche numeriche:
  - “long-division”
  - ~~metodo “computazionale”~~
- Tecniche analitiche
  - espansione in fratti semplici

Tecnica della “Long-division” o divisione ripetuta

- Si tratta di una tecnica semplice che permette di determinare **termine a termine** gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

- È opportuno esprimere $X(z)$ in funzione di potenze negative $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} = \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

Si esegue la divisione ripetuta del polinomio al numeratore per il polinomio al denominatore:

$$\begin{array}{r|l}
10z^{-1} + 5z^{-2} & 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \\
\hline
-10z^{-1} + 12z^{-2} - 2z^{-3} & 10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots \\
\cline{1-1}
17z^{-2} - 2z^{-3} &
\end{array}$$

- Il risultato è una combinazione lineare di potenze negative

$$10z^{-1} + 17z^{-2} + \ldots$$

- Ricordando che, per definizione, si ha

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

per semplice confronto si ottiene la sequenza

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 10 \\ x(2) &= 17 \\ &\ldots \end{aligned}$$

"Long division": riassumendo

- Metodo numerico e ricorsivo: fornisce i **valori** numerici della successione **termine a termine**, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa su operazioni di divisione di polinomi: è una tecnica **semplice** dal punto di vista **computazionale** (**vantaggio**).

Metodo "computazionale"

Si tratta di un'altra tecnica semplice che permette di determinare termine a termine gli elementi della sequenza $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Idea: metto in evidenza il termine "1", che è la Z-trasformata di …

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot 1 = \frac{N(z)}{D(z)} U(z)$$

$$D(z)\,X(z) = N(z)\,U(z)$$

Utilizzando le proprietà viste per la Z-trasformata si perviene all'equazione alle differenze:

$$a_n\,x(k+n)+a_{n-1}\,x(k+n-1)+\ldots+a_0\,x(k) \;=$$

$$b_m\,u(k+m)+b_{m-1}\,u(k+m-1)+\ldots+b_0\,u(k)$$

Non rimane che determinare le condizioni iniziali per risolvere termine a termine l'equazione alle differenze.

I campioni così determinati sono i valori della successione che è la Z-antitrasformata cercata.

Esempio

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2}$$

$$\Rightarrow \left(z^2 - 1.2z + 0.2\right) X(z) = (10z+5)\,U(z)$$

$$\Rightarrow x(k+2) - 1.2x(k+1) + 0.2x(k) = 10u(k+1) + 5u(k)$$

- $U(z) = 1 \Rightarrow u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
- $x(k) = 0, \forall k < 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} k = -2 & \Rightarrow & x(0) = 0 \\ k = -1 & \Rightarrow & x(1) = 10 \\ & \vdots & \end{array}$$

Metodo “computazionale”: riassumendo

- Metodo **numerico** e **ricorsivo**: fornisce i valori della successione termine a termine, non la forma chiusa della soluzione. Questo può essere uno **svantaggio**, a volte.

- Si basa sulla supposizione che la Z-trasformata oggetto di studio rappresenti un’equazione alle differenze con come ingresso un segnale ad impulso discreto, centrato nell’origine: è una tecnica **semplice** dal punto di vista computazionale (**vantaggio**).

Espansione in fratti semplici

- Si tratta di una **tecnica analitica** per determinare la sequenza

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$$

- Si esprime $X(z)$ come somma di un numero finito di termini elementari di cui si sa determinare la Z-antitrasformata

- Il primo passo consiste nell'aggiungere un termine z al denominatore (ciò si può sempre fare):

$$X(z) \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-p_1} + \frac{C_2}{z-p_2} + \ldots \frac{C_n}{z-p_n}$$

In generale:

$$\left[\frac{X(z)}{z}\right] = \frac{C_{1\,1}}{(z-p_1)} + \ldots \frac{C_{1\,n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} + \frac{C_{2\,1}}{(z-p_2)} + \ldots \frac{C_{2\,n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} + \ldots + \frac{C_{q\,1}}{(z-p_q)} + \ldots \frac{C_{q\,n_q}}{(z-p_q)^{n_q}}$$

$$C_{i\,j} = \frac{1}{(n_i-j)!} \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i-j)}}{d\,z^{(n_i-j)}} \left[\frac{X(z)}{z}\right] (z-p_i)^{n_i} \right\}$$

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i\,j}\,z}{(z-p_i)^j}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_{i,j}\,z}{(z-p_i)^j}\right] = C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\,1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i,j} C_{i,j}\,\frac{k^{(j-1)}}{(j-1)!}\,p_i^{k-j+1}\,1(k)$$

Caso in cui tutti i poli sono distinti:

NB

NB

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C_i z}{(z-p_i)}\right] = C_i\, p_i^k\; 1(k)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i\, p_i^k\, 1(k)$$

$$C_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ \frac{X(z)}{z}(z-p_i) \right\}$$

Esempio: poli tutti distinti

$$X(z) = \frac{10z}{z^2 - 1.2z + 0.2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$$

$$C_1 = \lim_{z\to 1} \frac{10}{z-0.2} = 12.5$$ $C_1 = \lim_{z\to+1} \left[\frac{X(z)}{z}\right](z-1)$

$$C_2 = \lim_{z\to 0.2} \frac{10}{z-1} = -12.5$$

$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_1}{z-1} + \frac{C_2}{z-0.2}$ $/ \cdot z$

$$X(z) = \frac{12.5z}{z-1} - \frac{12.5z}{z-0.2}$$

$$x(k) = 12.5 \cdot 1(k) - 12.5 \cdot 0.2^k \, 1(k)$$

Esempio: poli multipli

$$X(z) = \frac{z}{z^3 - 2.7\,z^2 + 2.4\,z - 0.7}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-0.7} + \frac{c_{2,1}}{z-1} + \frac{c_{2,2}}{(z-1)^2}$$

$$c_1 = \left[(z-0.7)\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.7} = 11,\bar{1}$$

$$c_{2,2} = \left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = 3,\bar{3}$$

$$c_{2\,1} = \left\{\frac{d}{d\,z}\left[(z-1)^2\,\frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=1} = -11,\bar{1}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{11.\bar{1}}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}}{z-1} + \frac{3.\bar{3}}{(z-1)^2}$$

$\cdot z$

$$X(z) = \frac{11.\bar{1}\,z}{z-0.7} - \frac{11.\bar{1}\,z}{z-1} + \frac{3.\bar{3}\,z}{(z-1)^2}$$

$$x(k) = \left[11.\bar{1}\,(0.7)^k + 3.\bar{3}\,k - 11.\bar{1}\right] 1(k)$$

Espansione in fratti semplici: riassumendo

- Metodo **analitico**: fornisce direttamente la **forma chiusa** della soluzione (**vantaggio**)

$$X(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{x(k)\}$$

- Si basa su tecniche d'analisi e proprietà di funzioni di variabile complessa: è una **tecnica "pesante"** dal punto di vista computazionale (**svantaggio**).

Interpretazione operatoriale di $\mathcal{Z}\{\cdot\}$

- Sia data la sequenza $v(t)$ con trasformata $V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t-1)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di un passo) ha trasformata $z^{-1}V(z)$
- Infatti:

$$v(t) = 0,\ t < 0$$

$$w(0) = 0, w(1) = v(0) = 0, w(2) = v(1), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \cdots + v(t-1)z^{-t} + \cdots \\ &= z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \cdots + v(t-1)z^{-t+1} + \cdots] \\ &= z^{-1}V(z) \end{aligned}$$

- Analogamente $w(t) = v(t-2)$ (sequenza $v(t)$ ritardata di due passi) ha trasformata $z^{-2}V(z)$
- La sequenza $w(t) = v(t+1)$ (sequenza $v(t)$ anticipata di un passo) ha trasformata $z[V(z) - v(0)]$
- Infatti:

$$w(0) = v(1), w(1) = v(2), \ldots$$

$$\begin{aligned} W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \cdots + v(t+1)z^{-t} + \cdots \\ &= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] \\ &= z[v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \cdots + v(t)z^{-t} + \cdots] - zv(0) \\ &= z[V(z) - v(0)] \end{aligned}$$

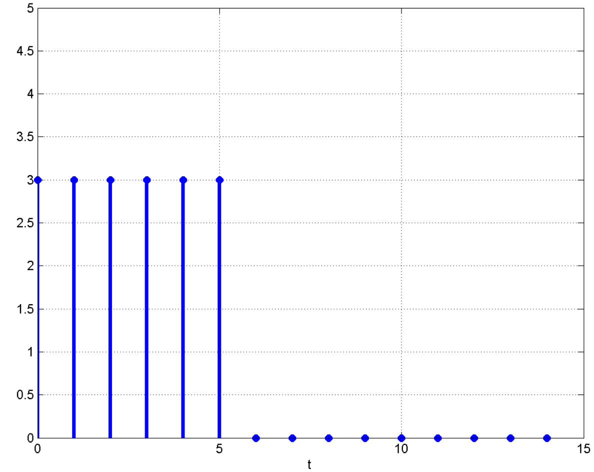
Quindi:

- Gli operatori z e z^{-1} possono essere visti come operatori di **anticipo** e **ritardo** rispettivamente
- In generale z^k e z^{-k} possono essere visti come operatori di anticipo e ritardo rispettivamente di k passi

Esempio

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$



$$v(t) = 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-6)$$

Ma $\mathcal{Z}\{1(k)\} = \dfrac{z}{z-1}$

$$V(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z^{-6}z}{z-1} = \frac{3(z^6-1)}{z^5(z-1)}$$

Ulteriori considerazioni su $\mathbf{X}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ vs $\mathbf{X}(\mathbf{z})$

- Torniamo alle possibili notazioni per una Z-Trasformata: a potenze di z oppure a potenze di z^{-1}

$$X\left(z^{-1}\right) = \frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z^2-2z}{4z^2+6z+8}$$

- Applicando gli operatori di “anticipo” e “ritardo” definiti in #93, possiamo ricavare da entrambe le trasformate un’equazione alle differenze che ci permetta di ricavare ricorsivamente, campione dopo campione, il segnale $\{x(k)\}$.

- Otterremo due equazioni alle differenti scritte in maniera diversa a seconda della Z-trasformata da cui partiamo …

- Partendo dall' **espressione in potenze di $\mathbf{z}^{-1}$** si ottiene

$$\left(4+6z^{-1}+8z^{-2}\right)\,X(z) = \left(1-2z^{-1}\right)\,U(z)$$

$$4\,x(k)+6\,x(k-1)+8\,x(k-2) \;=\; u(k)-2\,u(k-1)$$

- Il **valore all'istante corrente** del segnale $\{\,x(k)\}$ è **funzione** di **valori passati del segnale** stesso $\{\,x(k)\}$, di valori all'istante presente e nel passato dell'ingresso (che deve essere noto).

- Una Z-trasformata in potenze di z^{-1} può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**

- Abbiamo ottenuto una relazione che permette di determinare il valore all'istante attuale della successione incognita $\{x(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{x(k)\}$ e di quella assegnata.
.

- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Partendo dall' **espressione in potenze di** z si ottiene

$$\left(4\,z^2+6\,z+8\right)\,X(z) \;=\; \left(z^2-2\,z\right)\,U(z)$$

$$4\,x(k+2)+6\,x(k+1)+8\,x(k) \;=\; u(k+1)-2\,u(k)$$

- Il **valore nel futuro** del segnale $\{\,x(k)\}$ è **funzione** di **valori futuri ed all' istante corrente del segnale** stesso $\{\,x(k)\}$, di valori all' istante presente e nel futuro dell' ingresso (che deve essere noto).

- Una Z-trasformata in potenze di z può venire ricondotta ad un'equazione alle differenze (metodo di antitrasformazione "computazionale") che esprime una **relazione ricorsiva in avanti**

- $X(z)$ è antitrasformabile calcolando un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{x(k)\}$ [in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{x(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k) = \delta(k)\}$

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di predizione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

$X\left(z^{-1}\right)$ vs $X(z)$: concludendo

- Si noti che le due Z-trasformate, così come le due equazioni alle differenze a cui si arriva, descrivono la medesima funzione a tempo discreto.

- Analizzeremo ulteriori proprietà caratteristiche della notazione $X\left(z^{-1}\right)$ e di quella $X(z)$ quando studieremo i sistemi dinamici a tempo discreto (Parte 2) ed in particolare le Funzioni di Trasferimento (Parte 4).

Teorema del valore iniziale: applicazione e proprietà della Z-Trasformata

Data la Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

con $m \le n,$ vale la proprietà

$$\begin{cases} m = n & f(0) = \dfrac{b_m}{a_n} \\ m < n & \begin{cases} \underbrace{f(0) = f(1) = \cdots = f(n-m-1)}_{n-m} = 0 \\ f(n-m) = \dfrac{b_m}{a_n} \end{cases} \end{cases}$$

Per dimostrare la proprietà, si utilizza il teorema del valore iniziale:

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{k \to 0} f(k) = f(0)$$

1º caso: $m = n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$= \frac{b_m}{a_n}$$

2º caso: $m < n$

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$$

$$m = O(N(z)) < O(D(z)) = n$$

Per determinare il secondo campione della sequenza utilizziamo il teorema del valore iniziale e la proprietà di anticipo nel tempo

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z\,[F(z) - f(0)]$$

$$f(1) = \lim_{z \to \infty} z \frac{b_m z^m + \cdots + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n - 1 \longrightarrow m + 1 = O(z\,N(z)) < O(D(z)) = n$$

Si continua in maniera analoga:

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \left[F(z) - f(0) - f(1)\, z^{-1} \right]$$

$$f(2) = \lim_{z \to \infty} z^2 \, \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m < n - 2 \longrightarrow m + 2 = O(z\, N(z)) < O(D(z)) = n$$

Fino a quando? Sia $m = n - h$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{h-2} f(k)\, z^{-k} \right]$$

$$f(h-1) = \lim_{z \to \infty} z^{h-1} \, \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0} = 0$$

$$m + (n - m - 1) = O(z\, N(z)) < O(D(z)) = n$$

Finalmente:

$$f(n-m) = \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-m-1} f(k)\, z^{-k} \right]$$

$$f(n-m) = \lim_{z \to \infty} z^{n-m} \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0} = \frac{b_m}{a_n}$$

$$m + (n-m) = O\left(z\, N(z)\right) = O\left(D(z)\right) = n$$

Ancora considerazioni e proprietà: sequenza ritardata e condizioni iniziali

- Abbiamo già visto che, data una sequenza

$$\{x(k)\}\ ,\qquad k \in \mathbb{Z} \qquad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0$$

la Z-trasformata della sequenza $\{y(k)\}$ ritardata di *m* istanti di tempo rispetto alla sequenza originaria, è data da

$$y(k) = x(k-m) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

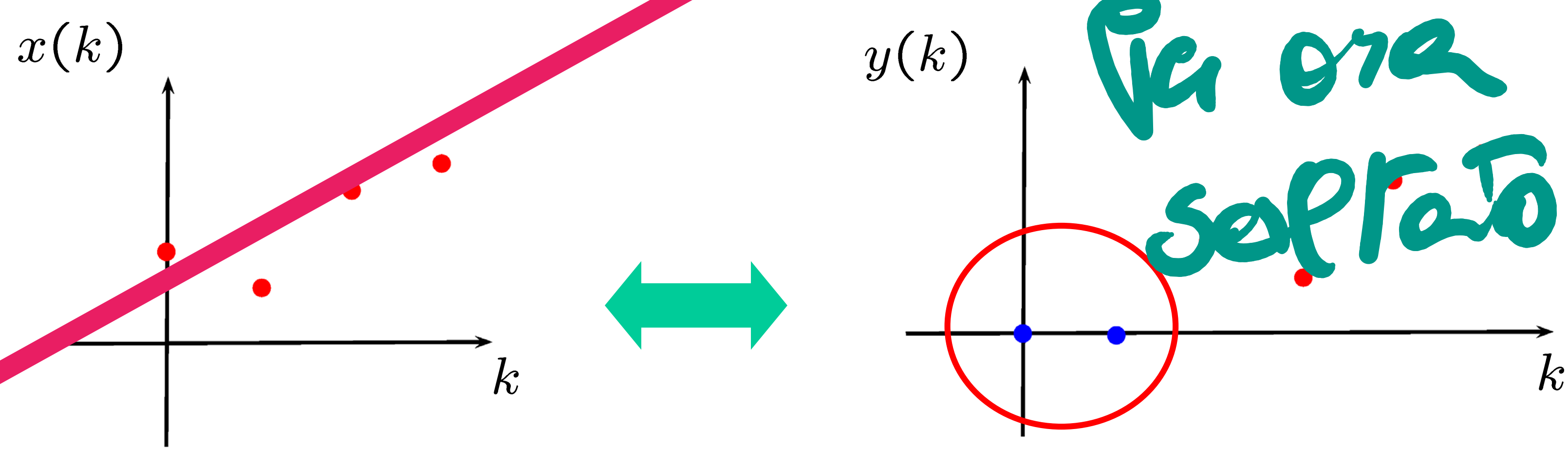
Per ora saltato!

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni**

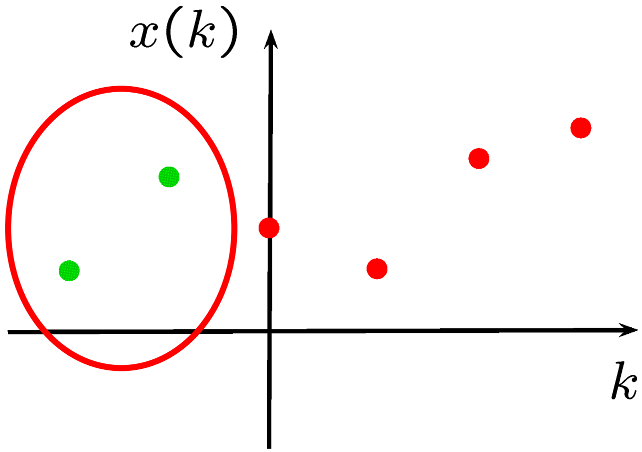
$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$



Per ora saltato!

$\{x(k)\}\ ,\quad k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \equiv 0\ \forall k < 0 \qquad y(k) = x(k-2)$

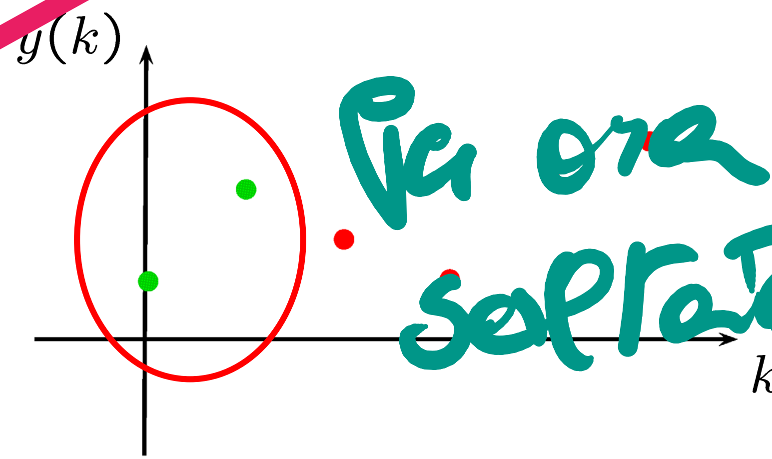
- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale**



$$\{x(k)\} \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x(k) \equiv 0 \ \forall k < -2$$

$$y(k) = x(k-2)$$



Per ora saltato!

Come si tiene conto di quei campioni "aggiuntivi"?

- **Traslazione nel tempo: ritardo di m campioni: caso generale**

Data la sequenza

$$\{x(k)\}\ ,\qquad k \in \mathbb{Z}$$

che ammette **campioni non nulli (IN NUMERO FINITO)** anche per istanti di tempo negativi, si costruisce la sequenza ritardata

$$y(k) \;=\; x(k-m) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Per ora saltato!

Tra le z-trasformate delle sequenze vale la relazione

$$Y(z) \;=\; z^{-m}\,X(z) + z^{-m}\left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\,z^{-p}\right]$$

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-k} =$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x(k-m)\, z^{-(k-m)} \right\} =$$

$$k - m \triangleq p$$

$$= z^{-m} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)} \right\} =$$

Per ora saltato!

$$z^{-m}\left\{\sum_{p=0}^{+\infty} x(p)\, z^{-(p)} + \sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} =$$

$$z^{-m}\, X(z) + z^{-m}\left\{\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\, z^{-(p)}\right\} = Y(z)$$

Lavoro sprecato!

La relazione appena trovata è utile per trasformare le equazioni alle differenze “all’ indietro”

$$u(k) = f\,(e(k), \ldots, e(k-m); u(k-1), \ldots, u(k-n))$$

$$\{e(k)\} \text{ nota } \forall\, k \geq 0 \qquad \text{incognita } \{u(k)\}, \quad k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \iff \quad u(-n), u(-n+1), \ldots, u(-1)$$

Per ora saltato!

Un esempio

- Consideriamo l'equazione alle differenze

$$x(k) \; - \; 3\,x(k-1) \; + \; 2\,x(k-2) \; = \; u(k)$$

con condizioni iniziali date da

$$x(-2) \; = \; 3 \qquad x(-1) \; = \; 12$$

e con ingresso (sequenza forzante nota) pari a

$$u(k) \; = \; \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},\; k \geq 0$$

Per ora saltato!

- Vogliamo risolvere l'equazione facendo uso della Z-trasformata.

- La sequenza forzante può essere riscritta nel modo seguente:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ 0 & k \text{ dispari} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$$

$$u(k) = 0.5 \cdot \left[(-1)^k + 1\right] \cdot 1(k)$$

- La sua Z-trasformata è allora

$$U(z) = 0.5 \cdot \left[\frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1}\right] = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Per ora saltato!

- In base alla regola descritta nella slide #110. e segg., applicando la Z-trasformata all'equazione alle differenze si ottiene

$$X(z) - 3\left[z^{-1}X(z) + x(-1)\right] + $$

$$+2\left[z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)\right] = U(z)$$

$$X(z) = \frac{z\left[(3z-2)\,x(-1) - 2z\,x(-2)\right]}{z^2 - 3z + 2} + $$

$$+\frac{z^2}{z^2-3z+2}\cdot\frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$$

Per ora saltato!

Esercizi sulla Z-Trasformata

Z-antitrasformata

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $F(z)$.

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\;(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4\,z + 1.08}{(z+0.5)\;(z-0.3)^2}$$

Sviluppo in fratti semplici

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to -0.5} (z+0.5)\,\frac{F(z)}{z}$$

$$C_{1,1} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{(z-0.3)^2}\right|_{z=-0.5} = 2$$

Analogamente

$$C_{2,2} = \left.\frac{-0.4\,z + 1.08}{z+0.5}\right|_{z=+0.3} = 1.2$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z+0.5} + \frac{C_{2,1}}{z-0.3} + \frac{C_{2,2}}{(z-0.3)^2}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.3} \frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}\,(z-0.3)^2\right]$$

$$C_{2,1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{F(z)}{z}\,(z-0.3)^2\right]\Bigg|_{z=0.3} = -2$$

In definitiva

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z+0.5} + \frac{-2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$\cdot z$

$$F(z) = 2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z-0.3} + 4\frac{0.3\,z}{(z-0.3)^2}$$

$$(-0.5)^k \qquad (0.3)^k \qquad k\;(0.3)^k$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right]\cdot 1(k)$$

$$F(z) = \frac{-0.4\,z^2 + 1.08\,z}{(z+0.5)\,(z-0.3)^2}$$

$$f(k) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{3}{10}\right)^k + 4\,k\left(\frac{3}{10}\right)^k\right]\cdot 1(k)$$

Osservazioni:

- la differenza di grado tra il polinomio a denominatore di $F(z)$ e quello al numeratore è pari ad 1
  - il primo campione della successione $f(k)$ è nullo!
- I primi campioni della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \left\{0,\ -\frac{2}{5},\ \frac{26}{25},\ \frac{1}{50},\ \frac{149}{625}\ldots\right\}$$

Proposta: ritrovare i primi 5 valori della sequenza con un metodo numerico (long division ~~oppure metodo computazionale~~).

Esercizio 2

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$X(z) = \frac{0.1\,(z+1)\,z}{(z-1)^2\,(z-0.6)}$$

Vale la medesima considerazione fatta per l'esercizio precedente:

poiché la $X(z)$ possiede uno zero nell'origine, la nuova espressione $\frac{X(z)}{z}$ possiede gli stessi poli di $X(z)$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{z-1} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{2,1}}{(z-0.6)^2}$$

$$C_{1,2} = \lim_{z \to 1} (z-1)^2 \, \frac{X(z)}{z} = 0.5$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{X(z)}{z} \, (z-1)^2 \right] = -1.0$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 0.6} (z-0.6) \, \frac{X(z)}{z} = 1.0$$

$$X(z) = -\frac{z}{z-1} + 0.5 \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.6}$$

$$x(k) = \left[-1 + 0.5\,k + (0.6)^k \right] 1(k)$$

$$\{x(k)\} = \{0,\ 0.1,\ 0.36,\ 0.716,\ 1.1296,\ \ldots\}$$

Tecnica analitica: sviluppo in fratti semplici

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^2+2z+1}$$

Si noti che poiché la $F(z)$ non possiede uno zero nell' origine, la nuova espressione $\frac{F(z)}{z}$ possiede, oltre agli stessi poli di $F(z)$, un polo nell' origine.

Sviluppo in fratti semplici:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2+1}{z\,(z+1)^2} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z+1} + \frac{C_{2,2}}{(z+1)^2}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2+1}{(z+1)^2} = 1 \qquad C_{2,2} = \lim_{z \to -1} \frac{z^2+1}{z} = -2$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to -1} \left\{ \frac{d}{d\,z} \left[\frac{z^2+1}{z} \right] \right\} = 0$$

$$F(z) = 1 - 2\frac{z}{(z+1)^2}$$

$$1 \longleftrightarrow \delta(k) \qquad \frac{z}{(z+1)^2} \longleftrightarrow (-1)^{k-1}\, k\, 1(k)$$

$$f(k) = \delta(k) - 2\,\underbrace{(-1)^{k-1} \cdot k \cdot 1(k)}_{\text{La successione diverge!}}$$

considerazione da fare dopo aver visto FA Parti 2 e 3

Che fosse una successione divergente lo si poteva dedurre anche dalla Z-Trasformata iniziale, che presenta un polo doppio di modulo unitario!

I primi valori della sequenza $f(k)$ sono:

$$\{f(k)\} = \{1,\, -2,\, 4,\, -6 \ldots\}$$

Proposta: ritrovare i primi 4 valori della sequenza con un metodo numerico (long division ~~oppure metodo computazionale~~).

Esercizio 4

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$$

Fattorizzando:

$$F(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$$

si nota che esiste un polo a modulo maggiore dell'unità: la successione diverge!

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)(z-3)} = \frac{C_{1,1}}{z} + \frac{C_{2,1}}{z-1} + \frac{C_{3,1}}{z-3}$$

$$C_{1,1} = \lim_{z \to 0} z \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{1}{3}$$

$$C_{2,1} = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{F(z)}{z} = \cdots = -1$$

$$C_{3,1} = \lim_{z \to 3} (z-3) \frac{F(z)}{z} = \cdots = \frac{2}{3}$$

$$F(z) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-1}$$

$$f(k) = \frac{1}{3} \delta(k) + \left[\underbrace{\frac{2}{3} 3^k}_{} - 1 \right] \cdot 1(k)$$

Il termine divergente

Esercizio 5

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{0.625\, z \left(z^2 + 0.8z - 0.6\right)}{(z-1)^4}$$

Osservazione

La trasformata presenta un polo di modulo unitario, con molteplicità maggiore dell'unità (molteplicità 4): il segnale corrispondente è certamente divergente.

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_{1,1}}{(z-1)} + \frac{C_{1,2}}{(z-1)^2} + \frac{C_{1,3}}{(z-1)^3} + \frac{C_{1,4}}{(z-1)^4}$$

$$C_{1,4} = \lim_{z\to 1} (z-1)^4 \frac{F(z)}{z} = 0.75$$

$$C_{1,3} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{d\,z}\left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z}\right] = 1.75$$

$$C_{1,2} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\,z^2}\left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z}\right] = 0.625$$

$$C_{1,1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\,z^3}\left[(z-1)^4 \frac{F(z)}{z}\right] = 0$$

$$F(z) = 0.625\frac{z}{(z-1)^2} + 1.75\frac{z}{(z-1)^3} + 0.75\frac{z}{(z-1)^4}$$

$$F(z) = 0.625\,\frac{z}{(z-1)^2} + 1.75\,\frac{z}{(z-1)^3} + 0.75\,\frac{z}{(z-1)^4}$$

$$\binom{k}{2} \cdot 1(k) \qquad \binom{k}{3} \cdot 1(k)$$

$$f(k) = \left\{0.625\,k + 1.75\,\boxed{\left[\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k\right]} + \right.$$

$$\left. + 0.75\,\boxed{\left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right]}\right\} 1(k)$$

In definitiva

$$f(k) = \left[0.5\,k^2 + 0.125\,k^3\right] 1(k)$$

Esercizio 6

Analizzare qualitativamente il segnale a cui corrisponde la Z-Trasformata

$$Y(z) = -\frac{(2z+p-1)}{(z+1+2p)(z-1)}$$

al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$

Valore iniziale $\lim_{z\to\infty} Y(z) = 0 = y(0) \quad \forall p$

- $p < -1$

due modi distinti; un modo è associato ad un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi l'uscita del sistema diviene illimitata al crescere di *k*

Per ora saltato!

- $p = -1$

in questo caso si ottiene
$$Y(z) = -\frac{2}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$y(k) = -2 \cdot 1(k-1)$$

- $-1 < p < 0$

$$Y(z) = -\frac{2z + p + 1}{(z+2p+1)(z-1)}$$

Per ora saltato!

la sequenza si mantiene limitata e tende a zero asintoticamente, dato che i modi della risposta sono associati a poli entrambi minori dell'unità (in modulo).

- $p = 0$

$$Y(z) = -\frac{2z-1}{(z+1)(z-1)}$$

$$y(k) = (-1)\cdot\delta(k) - \frac{1}{2}\cdot 1(k) + \frac{3}{2}\cdot(-1)^k\cdot 1(k)$$

comportamento oscillante permanente: poli di modulo unitario, semplici

- $p > 0$

C' è un polo di modulo maggiore dell'unità, quindi il segnale diviene illimitato al crescere di *k*.

Per ora saltato!

Esercizio 7

- Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

dove $$x(k) = 0 \quad \forall\, k < -2, \qquad x(-2) = x(-1) = 1$$

$$e(k) = \begin{cases} 1 & k = 0,\ 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Determinare **per via numerica** i primi 4 campioni non noti della successione:

$x(0)$ $\longrightarrow$ $$x(0) - 3x(-1) + 2x(-2) = e(0)$$

$$x(0) = 2$$

Per ora saltato!

$x(1)$ ⟶ $x(1) - 3\,x(0) + 2\,x(-1) \;=\; e(1)$

$x(1) \;=\; 4$

$x(2)$ ⟶ $x(2) - 3\,x(1) + 2\,x(0) \;=\; e(2)$

$x(2) \;=\; 9$

Per ora saltato!

$x(3)$ ⟶ $x(3) - 3\,x(2) + 2\,x(1) \;=\; e(3)$

$x(3) \;=\; 19$

- Scrivendo un semplice script in ambiente Matlab si possono rapidamente calcolare i primi 25 campioni della sequenza

```
al passo 0 valore di x 2.00
al passo 1 valore di x 4.00
al passo 2 valore di x 9.00
al passo 3 valore di x 19.00
al passo 4 valore di x 39.00
al passo 5 valore di x 79.00
al passo 6 valore di x 159.00
al passo 7 valore di x 319.00
al passo 8 valore di x 639.00
al passo 9 valore di x 1279.00
al passo 10 valore di x 2559.00
al passo 11 valore di x 5119.00
al passo 12 valore di x 10239.00
al passo 13 valore di x 20479.00
al passo 14 valore di x 40959.00
al passo 15 valore di x 81919.00
al passo 16 valore di x 163839.00
al passo 17 valore di x 327679.00
al passo 18 valore di x 655359.00
al passo 19 valore di x 1310719.00
al passo 20 valore di x 2621439.00
al passo 21 valore di x 5242879.00
al passo 22 valore di x 10485759.00
al passo 23 valore di x 20971519.00
al passo 24 valore di x 41943039.00
al passo 25 valore di x 83886079.00
```

Per ora saltato!

- Proviamo ora a **risolvere l'equazione** alle differenze facendo uso della **Z-trasformata**:

$$\mathcal{Z}\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) + z^{-m}\left[\sum_{p=-m}^{-1} x(p)\,z^{-p}\right]$$

$$x(k) - 3\,x(k-1) + 2\,x(k-2) = e(k)$$

$$X(z) = \frac{z\,[x(-1)\,(3\,z-2) - 2\,x(-2)\,z]}{z^2 - 3\,z + 2}$$

$$+\ \frac{z^2}{z^2 - 3\,z + 2}\cdot\frac{z^2+1}{z^2}$$

Per ora saltato!

- In definitiva la sequenza cercata possiede Z-trasformata data da:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)}$$

- Lo sviluppo in fratti semplici porta a

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} + \frac{(-2)\,z}{z-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-2}$$

Per ora saltato!

- Antitrasformando si ottiene quindi

$$x(k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(k) + \left[\frac{5}{2} \cdot 2^k - 1\right] \cdot 1(k)$$

Esercizi sulle Z-Trasformate

Esercizi “per casa”

Esercizio 1

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 + z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z-1)}$$

Esercizio 2

Partendo dalla medesima Z-Trasformata $F(z)$ dell'esercizio precedente, determinare i primi 3 valori della successione $f(k)$ utilizzando ~~sia~~ la tecnica di "long division" ~~che il metodo computazionale~~.

Esercizio 3

Determinare la successione che ha dato origine alla Z-Trasformata

$$F(z) = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{\left(z^2 - 1\right)(z-2)}$$

Esercizio 4

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+3) - 2.2\,x(k+2) + 1.57\,x(k+1) - 0.36\,x(k) = e(k)$$

con condizioni iniziali $x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k)$

Determinare:

- uno script Matlab che calcoli i primi 45 valori della sequenza $x(k)$
- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$
- partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ determinare, utilizzando l'algoritmo di long-division, i primi 5 valori della sequenza.

Esercizio 5

Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 0, \quad y(-2) = 0$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Per ora saltato!

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 6

Si consideri ancora l'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{3}{4}y(k-1) + \frac{7}{8}y(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1, \quad y(-2) = -2$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 0 \quad \forall k$

Per ora saltato!

Determinare:

- i primi 5 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $Y(z)$ e utilizzando il metodo computazionale.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $y(k)$.

Esercizio 7

Si consideri l'equazione alle differenze

$$x(k+2) + 3\,x(k) - 2\,x(k-2) = e(k)$$

con condizioni iniziali $\begin{cases} x(-2) = 12, \quad x(-1) = 0 \\ x(0) = 1, \quad x(1) = -2 \end{cases}$

e sequenza d'ingresso $e(k) = 1(k-1)$

Per ora saltato!

Determinare:

- i primi 10 valori della sequenza, partendo dalla Z-trasformata della soluzione $X(z)$ e utilizzando l'algoritmo di long-division.

- utilizzando la Z-trasformata, risolvere l'equazione e trovare l'espressione analitica del termine generico della sequenza $x(k)$.