Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

2ª parte

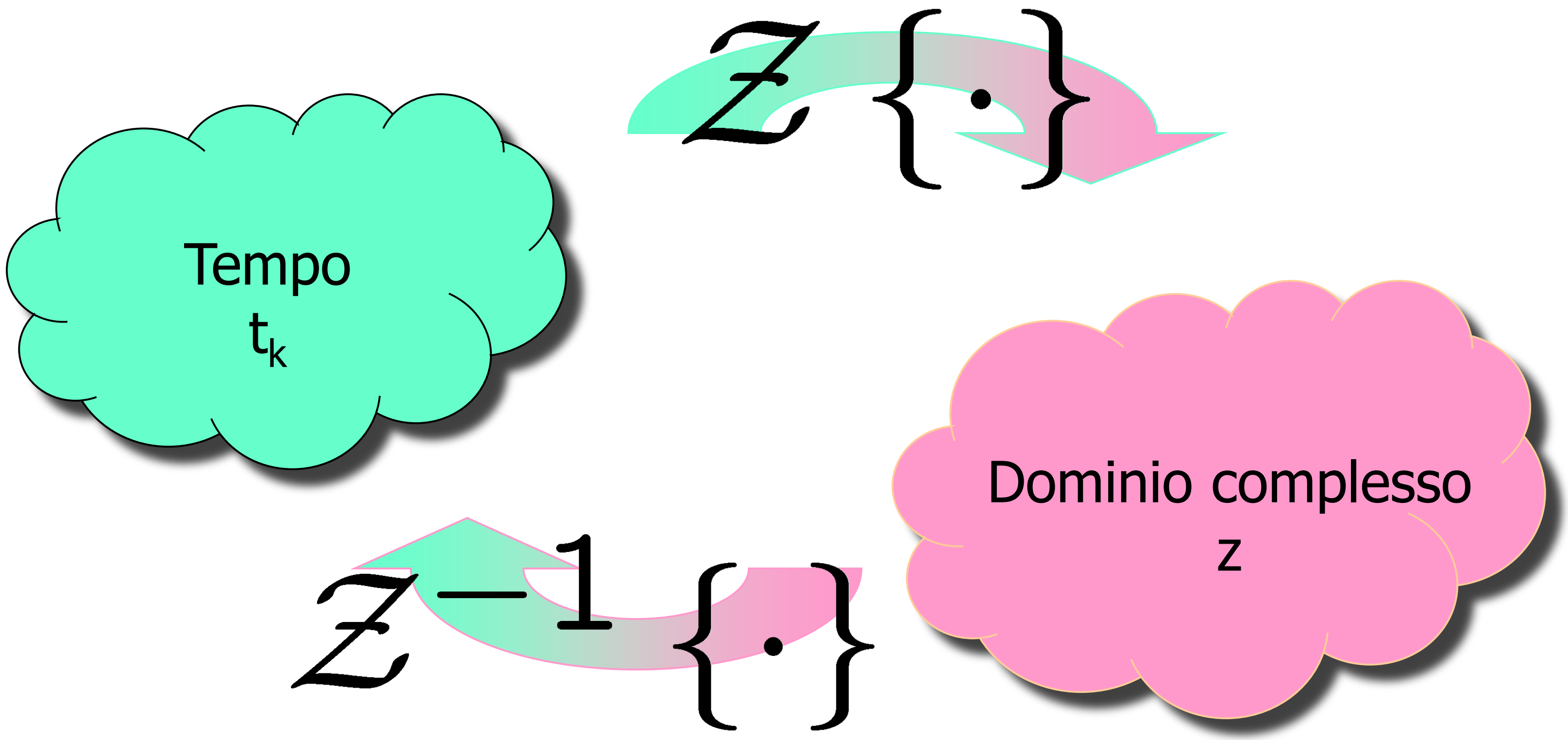
La Z-trasformata

Definizione, proprietà, trasformate elementari

Antitrasformazione

Teoremi

La Z-trasformata è un OPERATORE funzionale



La Z-trasformata: definizione

funzioni causali

La Z-trasformata della successione $\{x(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$

$0\,, \quad \forall k < 0$

è la funzione di variabile complessa

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Raggio di convergenza: tipicamente la serie che definisce la trasformata converge al di fuori di un cerchio nel piano della variabile complessa z :

$$|z| > R, \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Nel caso di segnali campionati:

- Se il segnale a tempo discreto è stato generato per campionamento, si definisce la Z-trasformata della successione in maniera analoga :

$$\{x(kT_s), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$0\,, \quad \forall k < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) z^{-k}$$

Notazioni ed osservazioni

- In generale non viene esplicitamente indicato l'intervallo di campionamento T_s con il quale è stata eventualmente ottenuta la sequenza $x(kT_s)$ ma semplicemente la si indica con $x(k)$
- Nella maggioranza dei casi, le Z-trasformate che considereremo saranno funzioni polinomiali (in particolare frazioni con polinomi a numeratore e denominatore).
- L'espressione di una Z-trasformata (nei casi di nostro interesse) può essere espressa tramite potenze di z oppure di z^{-1}

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{4+6z^{-1}+8z^{-2}} \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = \frac{z^2-2z}{4z^2+6z+8}$$

- Dal punto di vista algebrico sono equivalenti. L'unica difficoltà sta nel definire zeri e poli, perché nelle due notazioni sono differenti [zeri e poli sono le radici dei polinomi a numeratore ed a denominatore]. Per poli e zeri useremo sempre la notazione con potenze di z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \implies \begin{cases} \textbf{Zeri}\text{: radici di } N(z) \\ \textbf{Poli}\text{: radici di } D(z) \end{cases}$$

- Per ammettere Z-trasformata nel modo in cui è stata definita, le sequenze che consideriamo devono essere **causali**, ovvero

$$x(k) \equiv 0, \qquad \forall k < 0$$

Esempio

- Consideriamo la Z-trasformata

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5\,z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z+1)\,(z+2)}$$

- È immediato determinare zeri e poli dell'espressione analizzata.

- Se la Z-trasformata fosse espressa tramite potenze di z^{-1}, lo zero in $z = 0$ non sarebbe più così facilmente individuabile

$$X(z) = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{1 + 3\,z^{-1} + 2\,z^{-2}} = \frac{1 + 0.5\,z^{-1}}{(1 + z^{-1})\,(1 + 2\,z^{-1})}$$

Proprietà della Z-trasformata

- **Linearità**

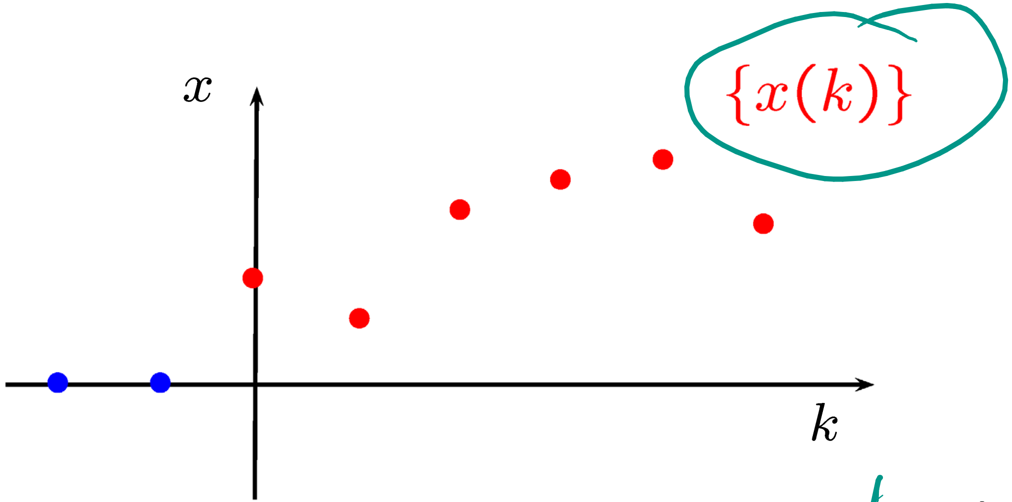
$$\mathcal{Z}\left[c_1\, f(k) + c_2\, g(k)\right] = c_1\, \mathcal{Z}\left[f(k)\right] + c_2 \mathcal{Z}\left[g(k)\right]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k+1)\right] = z\left[X(z) - x(0)\right]$$

- **Traslazione nel tempo: anticipo di m campioni**

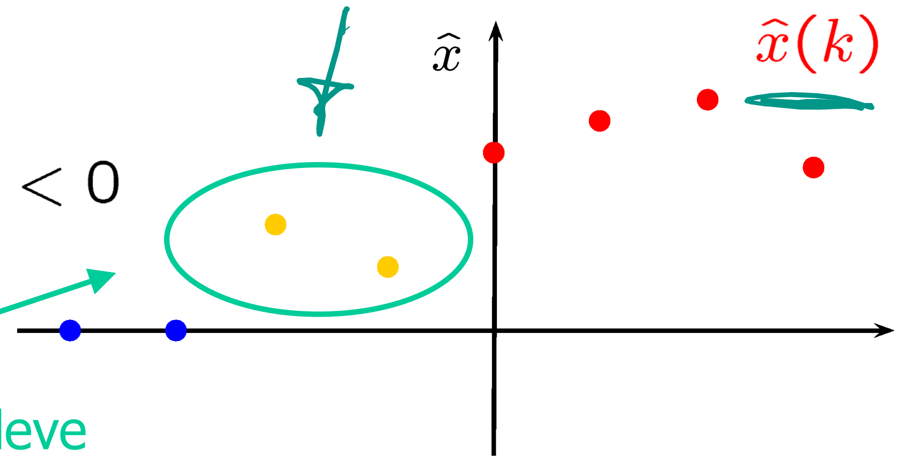
$$\mathcal{Z}\left[x(k+m)\right] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)\, z^{-k}\right]$$



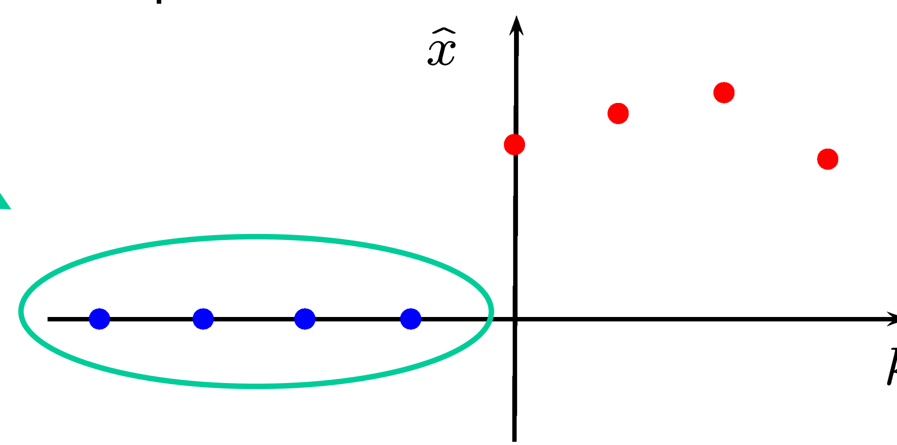
anticipo di 2 passi

$$\hat{x}(k) = x(k+2)$$

$$\hat{x}(k) \equiv 0 \; \forall \, k < 0$$



il nuovo segnale deve essere anch' esso causale!



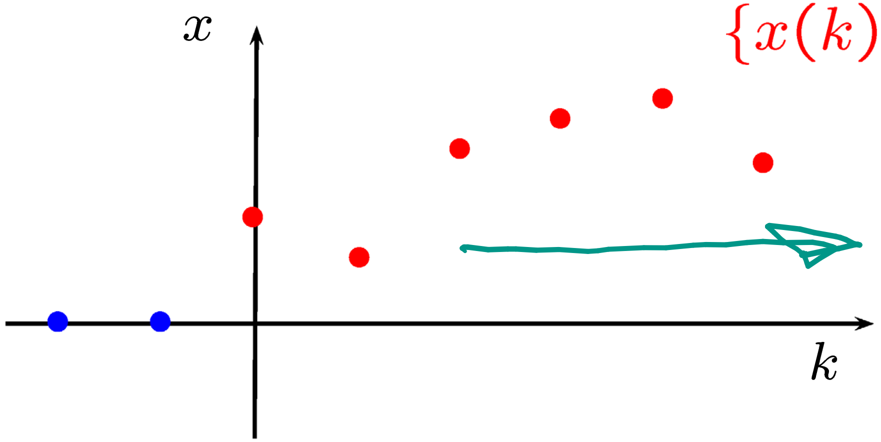
$$\{\hat{x}(k) = x(k+2)\}$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di 1 campione**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-1)\right] = z^{-1}X(z)$$

- **Traslazione nel tempo: ritardo di** m **campioni**

$$\mathcal{Z}\left[x(k-m)\right] = z^{-m}X(z)$$

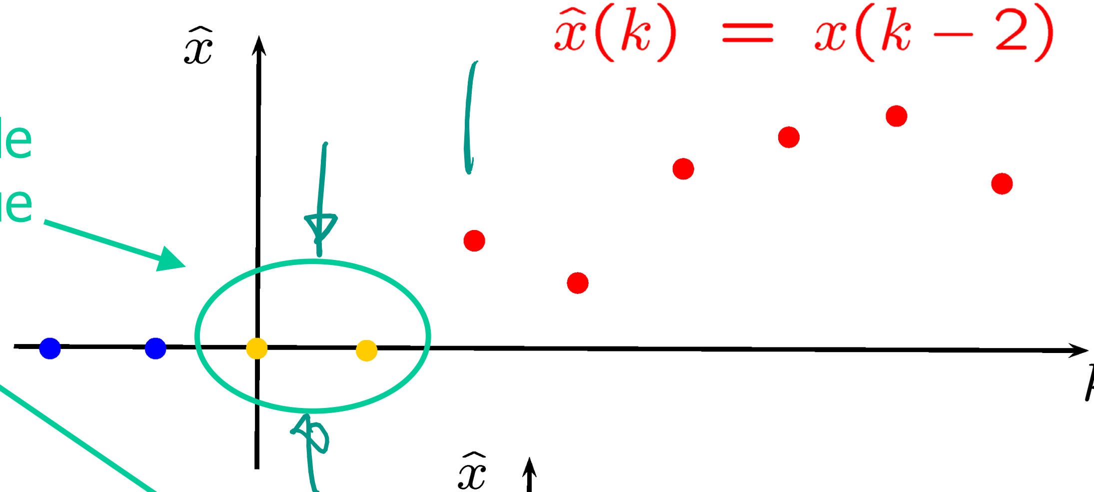


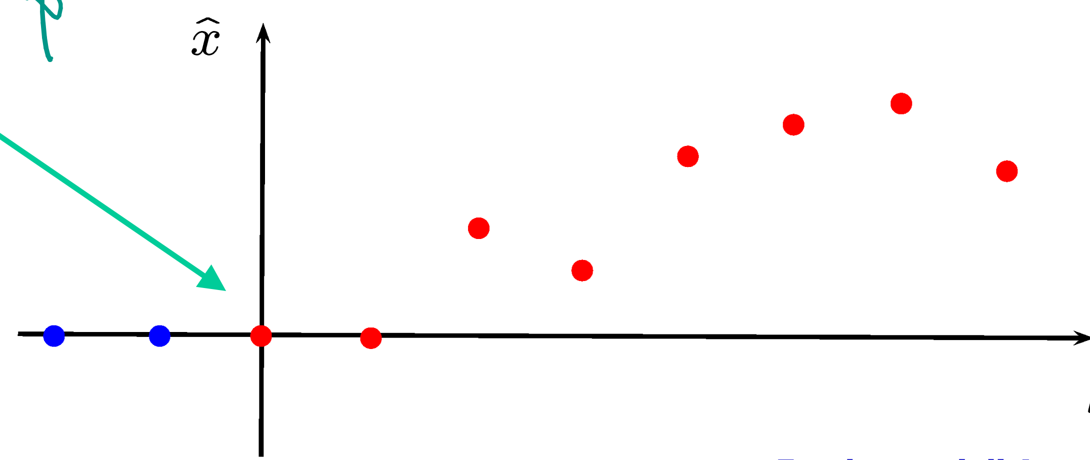
$\{x(k)\}$

ritardo di 2 passi

$\hat{x}(k) = x(k-2)$

il nuovo segnale inizia con due campioni nulli!





$\{\hat{x}(k) = x(k-2)\}$

- **Traslazione in frequenza**

$$\mathcal{Z}\left\{a^{k}\,x(k)\right\} = X\left(a^{-1}\,z\right)$$

- **Differenziazione complessa**

$$\mathcal{Z}\left\{k\,x(k)\right\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

- **Prodotto di convoluzione**

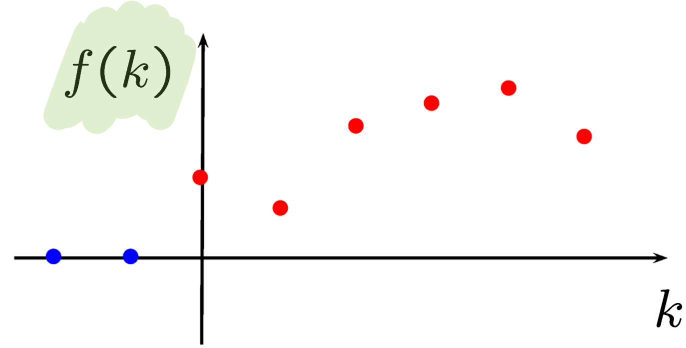
$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

I segnali sono causali.

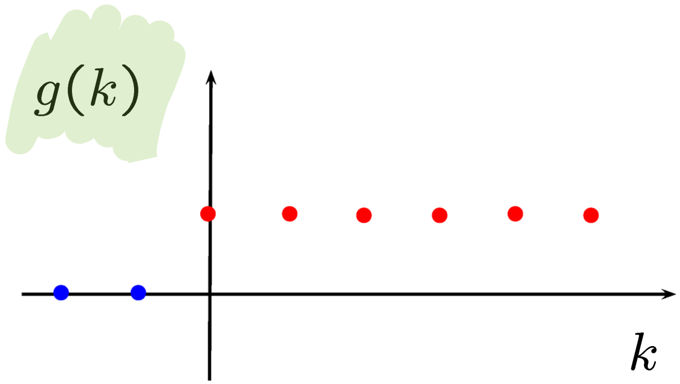
$$h(n) := \sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

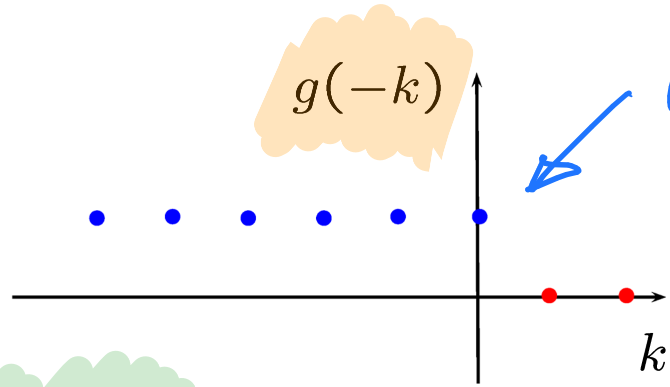
$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)\, g(k)$$

$$\mathcal{Z}\{h(n)\} = F(z)\, G(z)$$

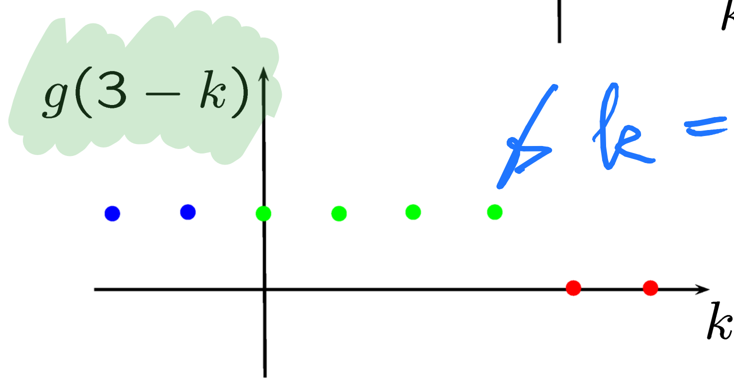


$$\{h(n)\} = \{f(k)\} \star \{g(k)\}$$

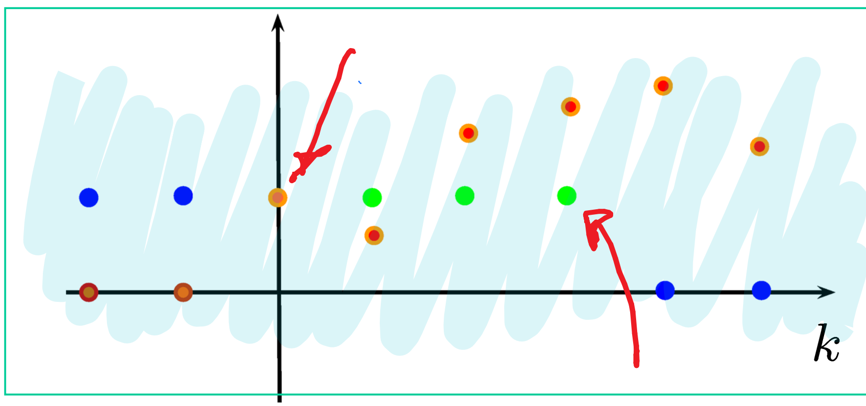




$k=0$



$k=3$



$$h(3) := \sum_{k=0}^{3} f(k)\, g(3-k)$$

Teorema del valore iniziale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata,

se esiste **finito** $\lim_{z \to \infty} X(z)$ allora

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{k \to 0} x(k) = x(0)$$

Teorema del valore finale

Data una sequenza $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ per la quale esista la Z-trasformata $X(z)$,

se **tutti i poli** di $X(z)$ **hanno modulo minore di 1**, **escluso al più un polo semplice in z = 1**, allora esiste finito $\lim_{k\to\infty} x(k)$ e

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}\left[\left(1 - z^{-1}\right) X(z)\right]$$

Esempio: applicazione dei teoremi

- Si consideri la Z-trasformata $$Y(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(3z+1)}$$

- Sfruttando i teoremi del valore iniziale e del valore finale, determinare:

$$y(0) = ? \quad y(1) = ? \quad \lim_{k\to\infty} y(k) = ?$$

- Per il teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z+1}{(z-1)\,(3z+1)} = 0$$

- Applicando la regola dell'anticipo ed ancora il teorema del valore iniziale si ottiene poi:

$$y(1) = \lim_{z\to\infty} z\,[Y(z) - y(0)] = \lim_{z\to\infty} \frac{z\,(2z+1)}{(z-1)\,(3z+1)} = \frac{2}{3}$$

- Applicando infine il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{2z+1}{(z-1)\,(3z+1)} = \frac{3}{4}$$

$p_1 = +1$ $\quad p_2 = -\frac{1}{3}$ $\quad |p_2| < 1$

$$y_1(k) \triangleq y(k+1)$$

$$y_1(0) = y(+1)$$

$$Y_1(z) = \mathcal{Z}\{y_1(k)\} = ?$$

$$= \mathcal{Z}\{y(k+1)\}$$

$$= z\left[Y(z) - y(0)\right]$$

$$y(0) = 0$$

$$Y_1(z) = \frac{z(2z+1)}{(z-1)(3z+1)}$$

$$y_1(0) = \lim_{z \to \infty} Y_1(z)$$

$y(0) = 0$

$y(1) = 2/3$

$y(2) = ?$

$y_2(k) = y(k+2)$

$y_2(0) = y(2)$

$Y_2(z) = Z\{y(k+2)\} = z^2 \left[Y(z) - y(0) - z^{-1} y(1) \right]$

Esempio: soluzione di una equazione alle differenze

Si consideri l' equazione alle differenze

$$y(k+2) = 3y(k+1) + y(k) + u(k)$$

$$y(k) \equiv 0 \quad \forall k < 0$$

$$\text{c. i.} \quad y(0)\,,\ y(1)$$

Applicando la Z-trasformata ad ambo i membri, per le proprietà viste si ottiene

$$Y(z) = \frac{\left(z^2 - 3z\right)\, y(0) + z\, y(1)}{z^2 - 3z - 1} + \frac{1}{z^2 - 3z - 1} U(z)$$

dipende dalle condizioni iniziali (soluzione libera)

dipende dalla successione d' ingresso (soluzione forzata)

$$y(k+2) = 3y(k+1) + y(k) + u(k)$$

$$\mathcal{Z}\{u(k)\} = U(z)$$

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} = z^2\left[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)\right]$$

$$\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = z\left[Y(z) - y(0)\right]$$

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} = \mathcal{Z}\{3y(k+1) + y(k) + u(k)\}$$

$$z^2\left[Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)\right] = 3z\left[Y(z) - y(0)\right] + Y(z) + U(z)$$

$$\left(z^2 - 3z - 1\right)Y(z) = z^2 y(0) + z\,y(1) - 3z\,y(0) + U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z(z-3)y(0) + zy(1)}{z^2 - 3z - 1} + $$

$$+ \frac{1}{z^2 - 3z - 1} \cdot U(z)$$