Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Trasformata Zeta

Segnali a tempo discreto

Equazioni alle differenze

La Z-trasformata: definizione e proprietà

1ª parte

Segnali a tempo discreto

Definizione: segnale a tempo discreto

successione

- Consideriamo una sequenza di istanti di tempo

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$$

- Si definisce segnale a tempo discreto una successione di valori associati alla sequenza temporale considerata

$$w_k \triangleq w(t_k)$$

- Se vale che $t_k - t_{k-1} = T_s, \forall k$ allora

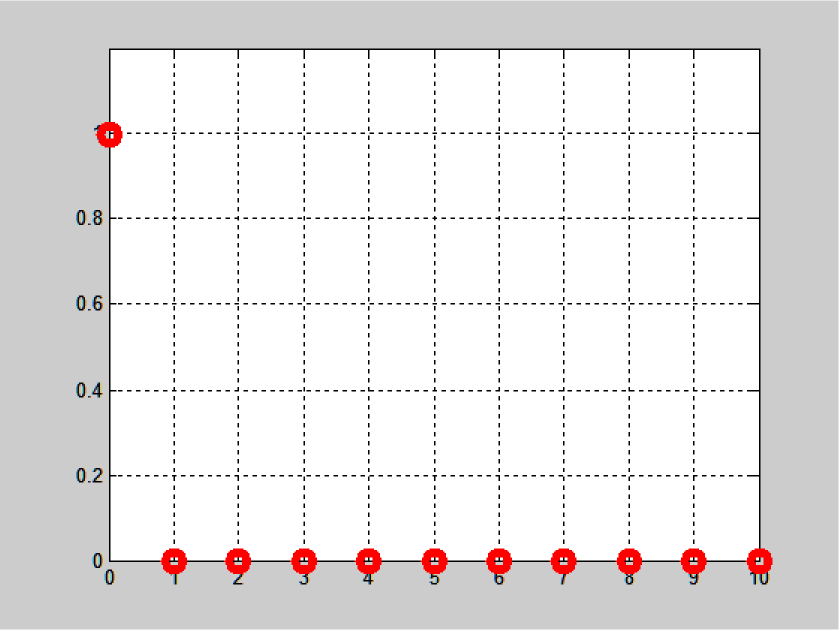
$$w_k = w(k\,T_s)$$

Alcuni segnali canonici a tempo discreto

Per semplicità in ciò che segue trascuriamo di indicare esplicitamente l' intervallo T_s

Impulso unitario

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = 0 \\ 0 & \text{per} \quad k \neq 0 \end{cases}$$



Impulso traslato

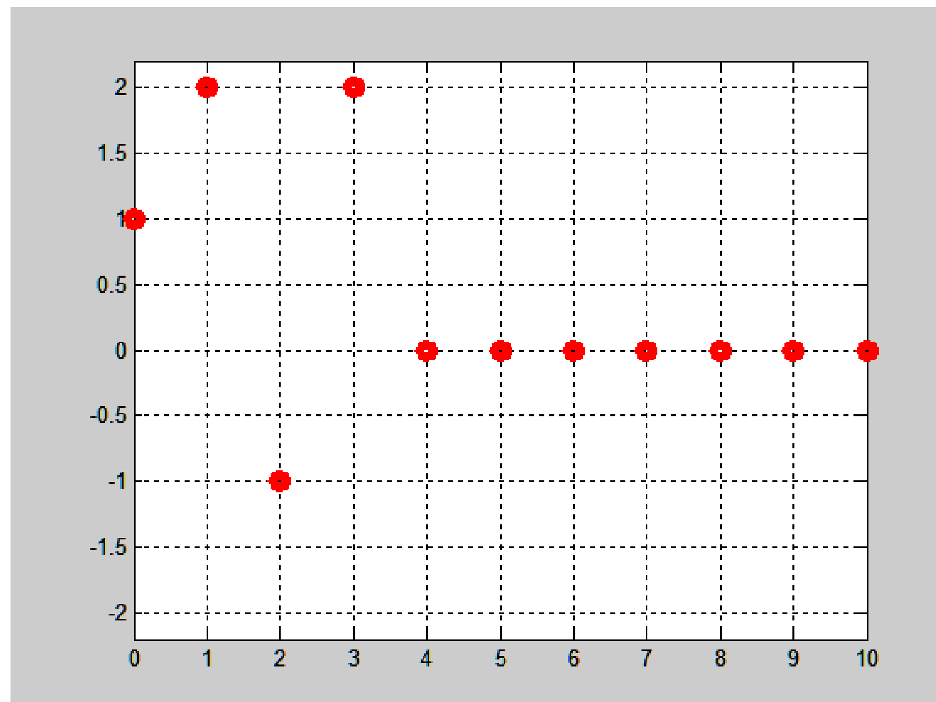
$$\delta(k-h) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k = h \\ 0 & \text{per} \quad k \neq h \end{cases}$$

- Una sequenza qualsiasi a tempo discreto può venir sempre espressa come sommatoria di segnali δ opportunamente traslati

$$w(k) = \delta(k) + 2\,\delta(k-1) + -\delta(k-2) + 2\,\delta(k-3)$$

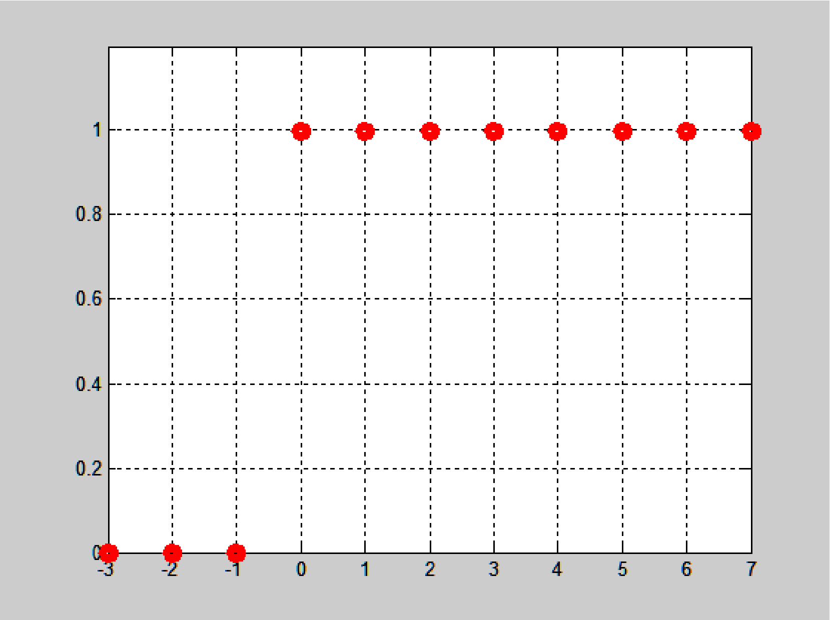
1 $k=0$
2 $k=1$
-1 $k=2$
2 $k=3$

0 $\forall k$ $\neq 0$ $\neq 1$ $\neq 3$ $\neq 2$



Gradino unitario

$$1(k) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$



- La sequenza 1(k) è utile per evidenziare che una sequenza w(k) è identicamente nulla per istanti di tempo negativi

$$w(k) = \hat{w}(k) \cdot 1(k) \iff w(k) = \begin{cases} \hat{w}(k) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Segnale esponenziale

$$w(k) = \begin{cases} a^k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = a^k \cdot 1(k) \qquad a \in C$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = a^{kT_s} \cdot 1(kT_s)$$

Rampa unitaria

$$w(k) = \begin{cases} k & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = k \cdot 1(k)$$

Evidenziando il campionamento

$$w(kT_s) = k \cdot T_s \cdot 1(kT_s)$$

Polinomio fattoriale di ordine h

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

- Si definisce **ricorsivamente**

$$k^{(0)} \triangleq 1(k)$$

$$\frac{k^{(h)}}{h!} \triangleq \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-h+1)}{h!} & \text{per } h>0,\ k \geq h \\ 0 & \text{per } h>0,\ k<h \end{cases}$$

- Si ottiene

$$\frac{k^{(1)}}{1!} = k \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(2)}}{2!} = \frac{k(k-1)}{2!} \cdot 1(k)$$
$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(3)}}{3!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\frac{k^{(4)}}{4!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \cdot 1(k)$$
$$= \left(\frac{1}{24}k^4 - \frac{1}{3}k^3 + \frac{11}{24}k^2 - \frac{1}{4}k\right) \cdot 1(k)$$

$$\ldots$$

- la sequenza $$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k)$$

sarà fondamentale nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto!

$$f(k) = \frac{k^{(h)}}{h!} \cdot 1(k) \quad \longleftrightarrow \quad f(t) = \frac{t^h}{h!} \cdot 1(t)$$

Altra notazione possibile: i coefficienti binomiali

$$\frac{k^{(h)}}{h!} = \binom{k}{h} \cdot 1(k)$$

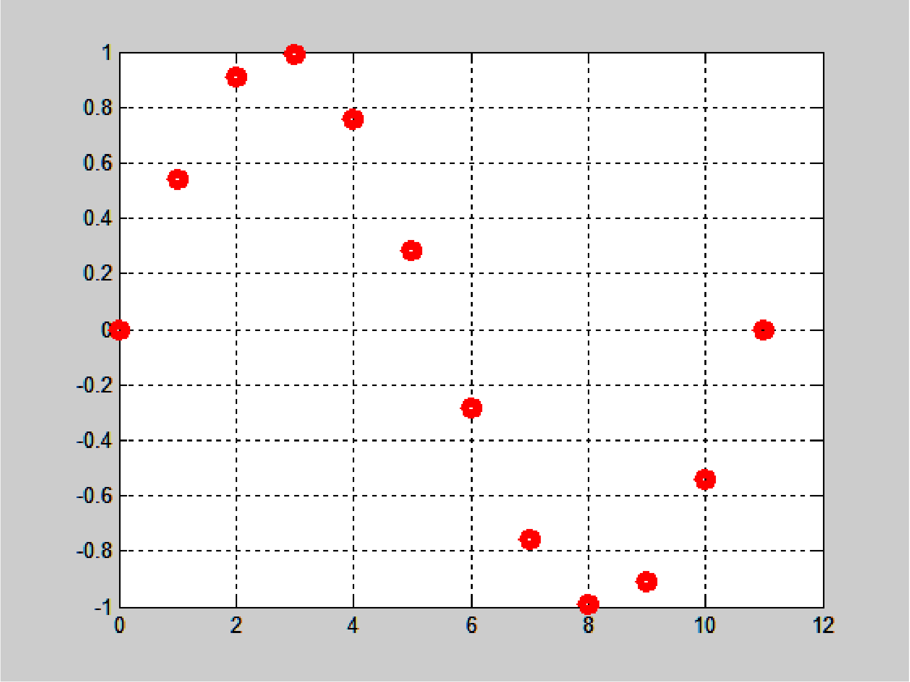
con

$$\binom{k}{h} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-h+1)}{h!} & \left[\begin{array}{l} \text{per } h > 0 \\ k \geq h \end{array}\right] \\ 1 & [\text{per } h = 0] \end{cases}$$

Segnale sinusoidale

$$w(k) = \begin{cases} \sin(\omega\, k) & \text{per} \quad k \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad k < 0 \end{cases}$$

$$w(k) = \sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$$



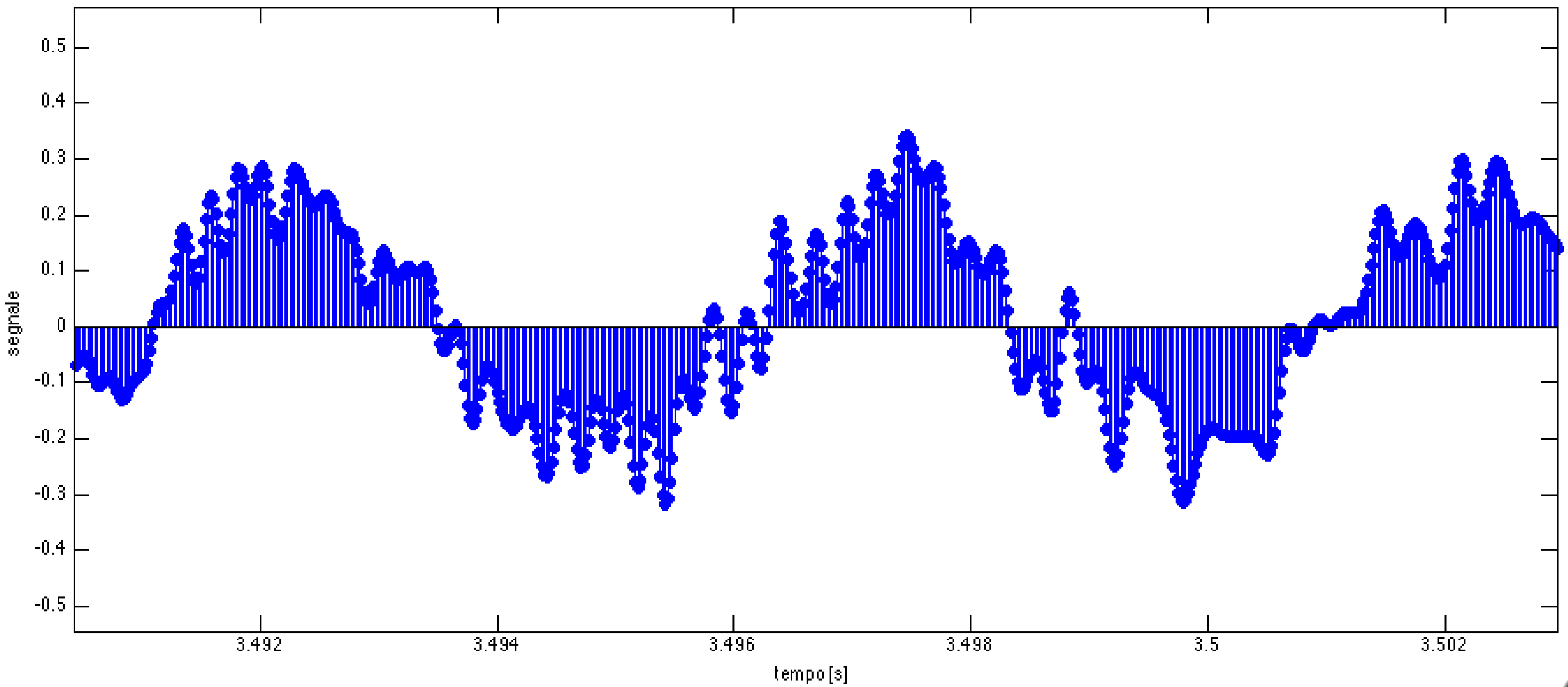
Evidenziando il campionamento

$$w(k\,T_s) = \sin(\Omega\, k\, T_s) \cdot 1(k\,T_s)$$

$$\Omega\, T_s = \hat{\omega}$$

Esempi

- segnali elettrici generati da suoni catturati attraverso un microfono (es. persona al telefono), sottoposti a campionamento e digitalizzazione

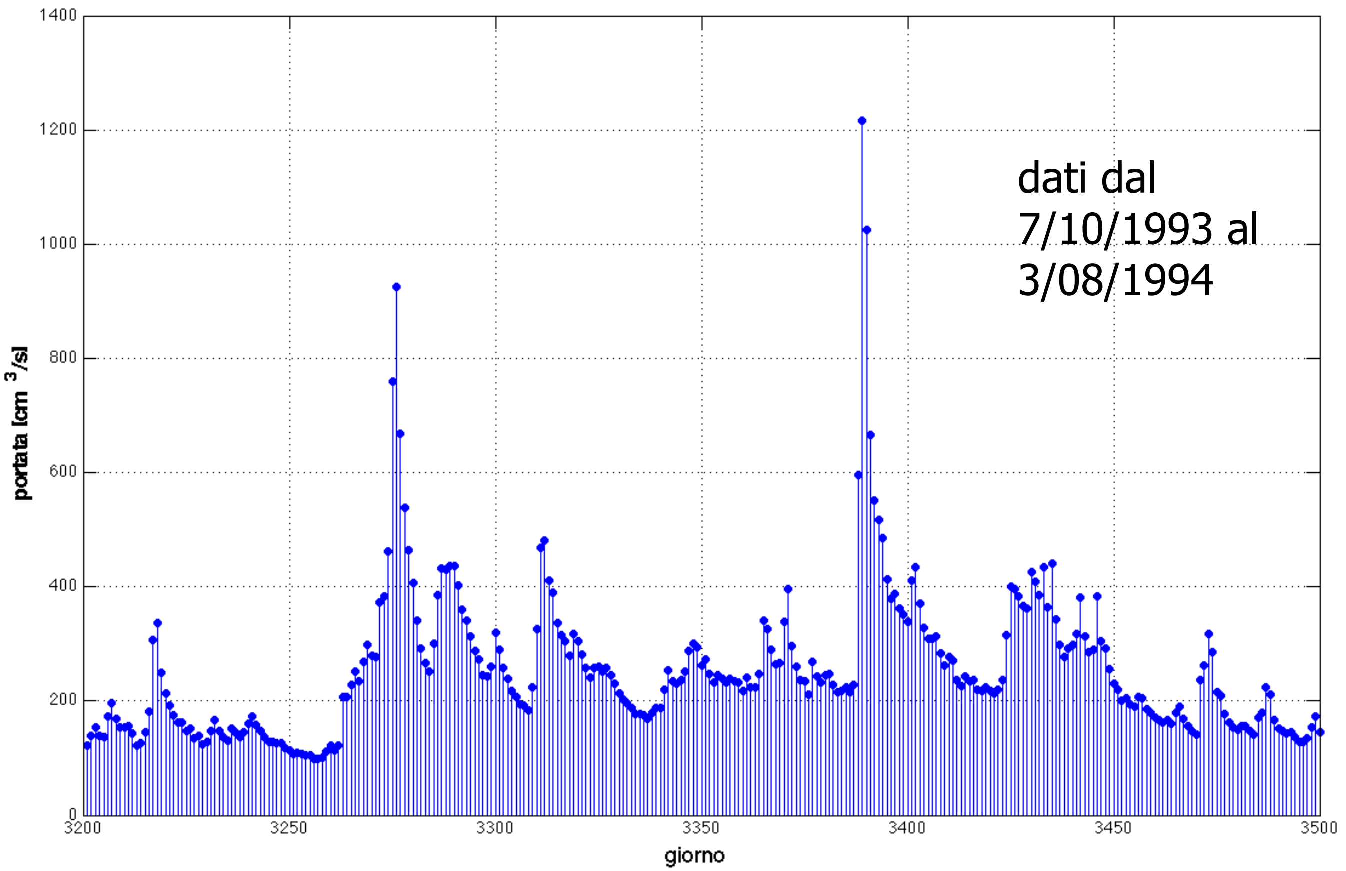


Dave Bowman: “Open the pod bay doors, HAL. “
HAL: “I'm sorry, Dave. I'm afraid I can't do that. “

[2001: A Space Odyssey (1968)]

durata: 7 s; campionamento: 48000 campioni al secondo; codifica in formato WAV (16 bit)

- segnali intrinsecamente a tempo discreto, come ad esempio quelli delle cosiddette *serie temporali* (dati metereologici, geofisici, economici ecc.)



portata media giornaliera del Danubio a Donauwörth, dal 1/1/1985 al 31/12/2004 – fonte: Università di Würzburg – 7300 campioni (1 campione al giorno)

Equazioni alle differenze

Definizione

- Le **equazioni alle differenze finite** rappresentano l' analogo a tempo discreto delle equazioni differenziali nel caso a tempo continuo.

$$G\left(t\,,\ y(t)\,,\ \dot{y}(t)\,,\ \ddot{y}(t)\,,\ \cdots y^{(n)}(t)\,,\ u(t)\right) = 0$$

$$\begin{aligned} y(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &\Longleftarrow \quad \text{incognita} \\ u(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &\Longleftarrow \quad \text{nota} \\ y(0)\,,\ \dot{y}(0)\,,\ \ddot{y}(0)\,,\ \cdots y^{(n-1)}(0) \quad &\Longleftarrow \quad \text{noti} \end{aligned}$$

$$F\left(k\,,\ y[k]\,,\ y[k-1]\,,\ y[k-2]\,,\ \cdots y[k-n]\,,\ u[k]\right) = 0$$

$$\begin{aligned} y[\cdot] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \quad &\Longleftarrow \quad \text{incognita} \\ u[\cdot] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \quad &\Longleftarrow \quad \text{nota} \\ \text{cond. iniziali} &\Longleftarrow \quad \text{note} \end{aligned}$$

- L'incognita stavolta è una **successione**, una funzione a tempo discreto

Notazione

- Nel seguito di questa parte del materiale, poiché si analizzeranno solamente funzioni a tempo discreto, si indicheranno le funzioni a tempo discreto semplicemente come

$$y(\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

- Esempio

$$w(k) = \sin(\omega\, k) \cdot 1(k)$$

- In generale, solo in casi in cui non fosse evidente la distinzione tra funzioni a tempo continuo e quelle a tempo discreto useremo la notazione presentata in #18.

- Si può scrivere l'equazione in forma esplicita, cioè esprimendo il termine generico $y(k)$ della successione incognita come funzione di un numero finito di valori passati sia della sequenza incognita $\{y(k)\}$ che della sequenza di eccitazione $\{u(k)\}$

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Per **equazione alle differenze di ordine *n*** si intende una equazione alle differenze in cui *n* è la "*distanza temporale* " massima tra gli elementi della sequenza incognita, che compaiono nell'equazione.

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Ricapitolando, una **equazione alle differenze finite** è una equazione che ha come **incognita** una **funzione a tempo discreto (una successione)**.

- L' equazione alle differenze esprime il legame tra la successione incognita ed altre successioni note, assegnando anche opportune condizioni iniziali.
- Il legame viene espresso tramite una relazione che lega tra loro e/o alle successioni note i valori della successione incognita ad istanti discreti di tempo diversi:

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

- Il termine **equazione alle differenze** deriva dal fatto che è possibile definire le **differenze finite**

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$$

Differenza di ordine *1*

$$\nabla^2 y(k) = \nabla y(k) - \nabla y(k-1)$$

Differenza di ordine *2*

$$\nabla^3 y(k) = \nabla^2 y(k) - \nabla^2 y(k-1)$$

Differenza di ordine *3*

$$\cdots$$

$$\nabla^n y(k) = \nabla^{n-1} y(k) - \nabla^{n-1} y(k-1)$$

Differenza di ordine *n*

- I termini $y(k)$, $y(k-1)$ ecc. si possono allora esprimere in funzione delle differenze finite $\nabla^h y(k)$ appena definite [una sorta di rapporti incrementali]

$$y(k) = y(k)$$

$$y(k-1) = y(k) - \nabla y(k)$$

$$y(k-2) = y(k) - 2\nabla y(k) + \nabla^2 y(k)$$

$$\cdots$$

- Sostituendo nell'equazione

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m)\right)$$

si ottiene

$$\hat{f}\Big(y(k), \nabla y(k), \nabla^2 y(k), \cdots, \nabla^n y(k),$$
$$u(k), \nabla u(k), \nabla^2 u(k), \cdots, \nabla^m u(k)\Big) = 0$$

- Le due espressioni sono equivalenti, ma la prima delle due (quella ricorsiva) è quella che verrà utilizzata in questo corso.

Un semplice esempio

- Partiamo dall' equazione alle differenze di ordine 2

$$u(k) = -a_1\, u(k-1) - a_2\, u(k-2) + b_0\, e(k)$$

- Sostituiamo ai termini $u(k-1),\, u(k-2)$ le espressioni

$$u(k-1) = u(k) - \nabla u(k)$$

$$u(k-2) = u(k) - 2\,\nabla u(k) + \nabla^2 u(k)$$

- Si ottiene l' equazione equivalente

$$a_2 \nabla^2 u(k) - (a_1 + 2a_2)\,\nabla u(k) + (a_2 + a_1 + 1)\,u(k) = b_0 e(k)$$

Osservazioni e definizioni

- Nel caso in cui la funzione $f(\cdots)$ sia lineare si ottiene una **equazione lineare alle differenze di ordine n**:

$$y(k) = b_0(k)u(k) + b_1(k)u(k-1) + \cdots + b_m(k)u(k-m) +$$
$$-a_1(k)y(k-1) - a_2(k)y(k-2) - \cdots - a_n(k)y(k-n)$$

- Le equazioni lineari alle differenze per i sistemi dinamici a tempo discreto rappresentano l'analogo delle equazioni differenziali lineari del caso a tempo continuo.

- In generale i coefficienti dell'equazione possono variare, al variare dell'istante di tempo considerato:

$$b_j = b_j(k),\ a_i = a_i(k)$$

Ancora definizioni

- Se i valori dei coefficienti $a_i,\ b_j$ sono costanti, si ha un ' **equazione lineare alle differenze a coefficienti costanti**.

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m) +$$
$$-a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \cdots - a_n y(k-n)$$

- Questa **particolare classe** di equazioni alle differenze sarà quella di interesse nel corso.

Come si risolve un' equazione alle differenze, lineare, a coeff. costanti?

- Si può dimostrare che la **soluzione è unica** qualora siano noti i **valori iniziali** della sequenza incognita [ovviamente le altre sequenze che compaiono nell'equazione devono essere note] e l' **istante iniziale** [cioè le condizioni iniziali].

- Per ottenere campione per campione la sequenza incognita è possibile risolvere ricorsivamente l' equazione, espressa in forma esplicita.

- Non è una tecnica efficiente! Esistono metodi più efficaci! Se ne riparlerà nel prosieguo del corso …

Esempio

- Si vuole risolvere l'equazione

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k)$$

a partire dall'istante $k = 0$, con condizioni iniziali

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2 \qquad\qquad y(-2) = 0\,,\; y(-1) = 0$$

e sequenza "*eccitante*" data da $u(k) = \delta(k)$

- La sequenza-soluzione risulta essere allora ("sequenza di Fibonacci")

$$y(0) = y(-1) + y(-2) + u(0) = 1 \qquad y(1) = y(0) + y(-1) + u(1) = 1$$

$$y(2) = y(1) + y(0) + u(2) = 2 \qquad y(3) = y(2) + y(1) + u(3) = 3$$

$$\ldots$$

$$\{y(k)\} = \{1\,,\;1\,,\;2\,,\;3\,,\;5\,,\;8\,,\;13\,,\;21\,,\;34\,,\ldots\}$$

Esempio (continua...)

- Script in Matlab® per determinare i primi 10 campioni

```
N = 10; % i primi N+1 valori della sequenza soluzione
ym1 = 0; ym2 = 0; % valori iniziali
% y(-1) -> ym1  || y(-2) -> ym2

% preallocazione delle variabili
uk = zeros(N+1,1);
uk(1) = 1; % il primo campione e' pari ad 1, tutti gli altri
sono nulli
y_offset = 2; % due le condizioni iniziali su y
yk = zeros(N+1+y_offset,1); % prealloco anche per le
condizioni iniziali
% (continua…)
```

```
clc
disp('=======================================');
disp('soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)');
disp('con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)');
fprintf(1, '\n valutati i primi %g valori della soluzione \n',N);
disp('=======================================');
for k = 0 : N
    % ciclo sugli istanti di tempo per cui
    % si vuole risolvere l'equazione
    % alle differenze
    ik = k+1; % indice per i vettori uk ed yk
    yk(ik+y_offset) = yk(ik+y_offset-1) + ...
                      yk(ik+y_offset-2) + uk(ik);

    messaggio = sprintf('al passo %d valore di y %.2f',…
                         k,yk(ik+y_offset));
    disp(messaggio); % visualizza risultato
end % for
disp('=======================================');
```

- Risultato visualizzato in Matlab®

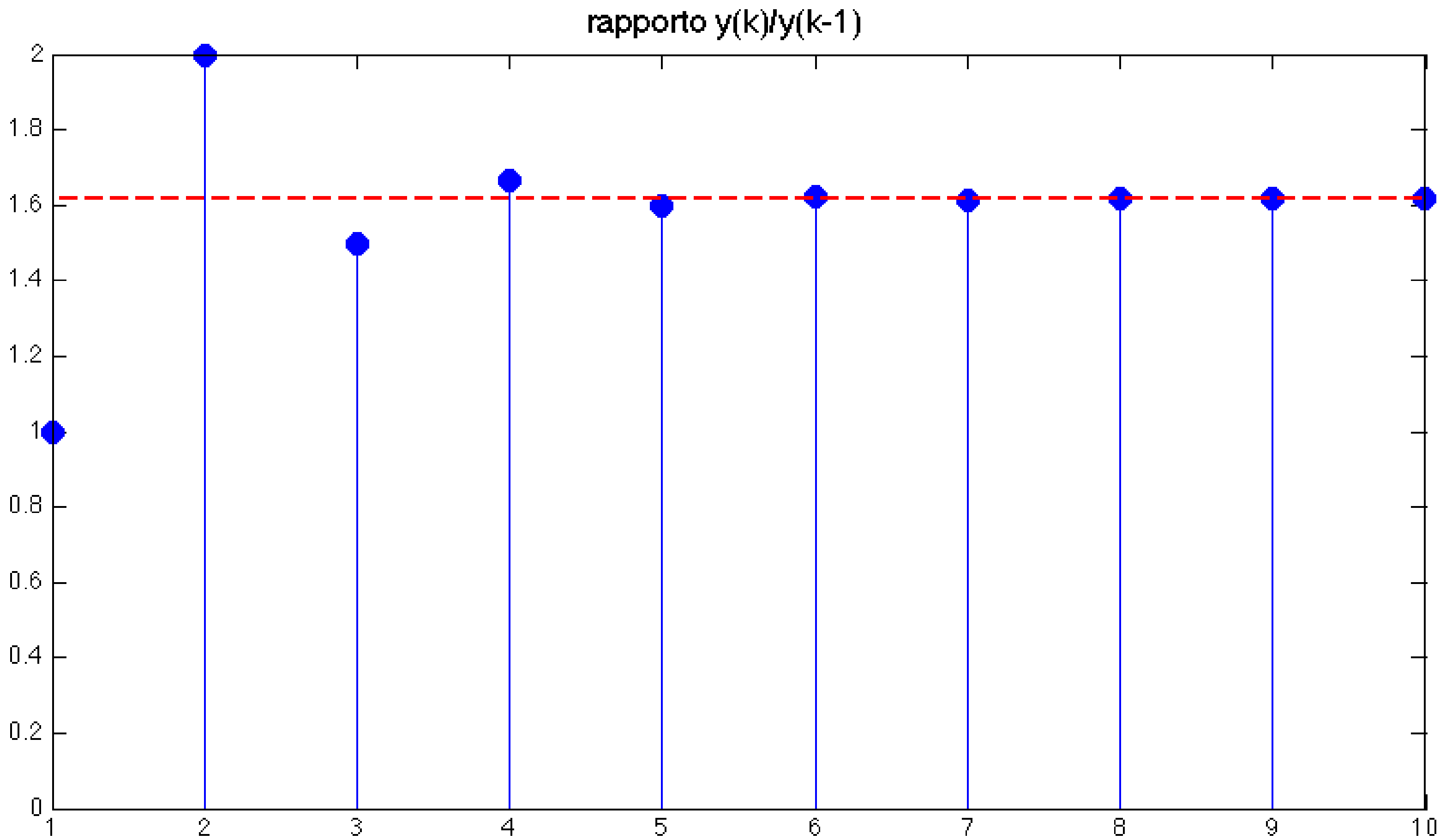
```
======================================
soluzione di y(k)=y(k-1)+y(k-2)+u(k)
con y(-2)=y(-1)=0    u(k)=imp(k)

 valutati i primi 10 valori della soluzione
======================================
al passo 0 valore di y 1.00
al passo 1 valore di y 1.00
al passo 2 valore di y 2.00
al passo 3 valore di y 3.00
al passo 4 valore di y 5.00
al passo 5 valore di y 8.00
al passo 6 valore di y 13.00
al passo 7 valore di y 21.00
al passo 8 valore di y 34.00
al passo 9 valore di y 55.00
al passo 10 valore di y 89.00
======================================
```

Esempio (continua...)

- Quale è il comportamento della sequenza soluzione? Diverge? Converge ad un valore finito?
- Il comportamento da che cosa dipende? Dalle condizioni iniziali? Dal segnale di eccitazione? Da entrambi?
- Provare a cambiare le condizioni iniziali ed a risolvere di nuovo in maniera ricorsiva l’equazione…
- Provare ad utilizzare un altro segnale di eccitazione (con ampiezza limitata)…

- ultima parte dello script

```
%--analisi del termine k-esimo della successione--
% viene disegnato l'andamento del rapporto
% y(k)/y(k-1) per k=2,3,....
rapporto_k_km1 = yk(y_offset+2:end)./yk(y_offset+1:end-1);
figure('Name','successione di Fibonacci');
stem(rapporto_k_km1,'fill');
title('rapporto y(k)/y(k-1)');
hold on;
Fidia_n = (1+sqrt(5))/2;
plot(ones(size(rapporto_k_km1))*Fidia_n, 'r--');
```



$$y(k) = y(k-1) + y(k-2) + u(k) \qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0 \qquad y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

Un altro esempio

- Proviamo a modificare l'equazione alle differenze, in questo modo

$$y(k) = y(k-1) - y(k-2) + u(k)$$

- A parità di condizioni iniziali e di segnale eccitante, come evolve la soluzione stavolta?

$$y(-2) = 0\,,\ y(-1) = 0 \qquad u(k) = \delta(k)$$

$$y(k) = 0 \quad \forall k < -2$$

$$\{y(k)\} = \{\boxed{1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0}\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ -1\,,\ 0\,,\ \cdots\}$$

Osservazioni

- La formulazione presentata finora per le equazioni alle differenze non è l'unica possibile.

- L'espressione

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$

  esprime una **relazione ricorsiva "all'indietro"**, che fornisce il valore all'istante attuale della successione incognita $\{y(k)\}$ in funzione di valori passati della successione stessa $\{y(k)\}$ e di quella assegnata $\{u(k)\}$.
- È una formulazione utile ad esprimere algoritmi da eseguire in *real time*, quali elaborazione di segnali campionati (es. tramite DSP quali filtraggio, cancellazione d'eco ecc.) ed algoritmi di controllo.

- Esiste anche la possibilità di esprimere le equazioni alle differenze tramite una **relazione ricorsiva in avanti**

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

- Questa relazione fornisce allora un **valore nel futuro** della sequenza incognita $\{y(k)\}$[in particolare *n* passi nel futuro, se *n* è l'ordine dell'equazione alle differenze], in funzione di valori futuri ed all'istante attuale sia della sequenza $\{y(k)\}$ che di quella assegnata $\{u(k)\}$.

- È una formulazione utile a descrivere algoritmi di predizione, cioè modelli matematici utilizzati per predire l'evoluzione futura di fenomeni e/o grandezze ecc.

Ancora altre osservazioni

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva “all’indietro”, in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all’istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k) = f\left(y(k-1), \cdots, y(k-n), u(k), \cdots, u(k-m)\right)$$

$$\{u(k)\} \text{ nota } \forall k \geq 0 \qquad \{y(k)\} \text{ incognita } \forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(-n),\ y(-n+1),\ y(-n+2),\ \cdots\ y(-1)$$

- Per una equazione alle differenze di ordine n descritta da una relazione ricorsiva "in avanti", in cui la sequenza incognita $\{y(k)\}$ abbia inizio all'istante $k = 0$, le condizioni iniziali saranno

$$y(k+n) = g\left(y(k+n-1), \cdots, y(k), u(k+m), \cdots, u(k)\right)$$

$$\{u(k)\} \ \text{nota}\,\forall k \geq 0 \qquad\qquad \{y(k)\} \ \text{incognita}\,\forall k \geq 0$$

$$\text{c.i.} \Leftrightarrow y(0),\ y(1),\ y(2),\ \cdots\ y(n-1)$$