Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: http://control.units.it

Esercizi

Uso della trasformata di Laplace

3ª parte

Esercizio - teoremi del valore iniziale e finale

È nota $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

Determinare

a) valore iniziale di $y(t) \rightarrow y(0) = ?$

b) il valore iniziale di $\dot{y}(t) \rightarrow \dot{y}(0) = ?$

(c) valore finale di $y(t) \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = ?$

(d) l'espressione di $y(t)$

(a) Applica il teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{s \to +\infty} sY(s)$$

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{s+5}{(s+2)(s+1)} = 0$$

(b) $\dot{y}(0) = ?$

Sfrutto la conoscenza di $y(0)$ e la proprietà

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0) \Longrightarrow \dot{f}(t)$$

Infine sfrutterò ancora il Teorema del valore iniziale.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - \overbrace{y(0)}^{0} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = Y_1(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} = Y_1(s)$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \to +\infty} s Y_1(s)$$

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{s(s+5)}{(s+1)(s+2)} = +1$$

(c) $\lim_{t \to +\infty} y(t) = ?$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

$p_1 = 0 \quad p_2 = -1 \quad p_3 = -2$

Ipotesi:

- polo semplice in $s = 0$ ✓
- tutti gli altri poli $\mathrm{Re}(p) < 0$ ✓

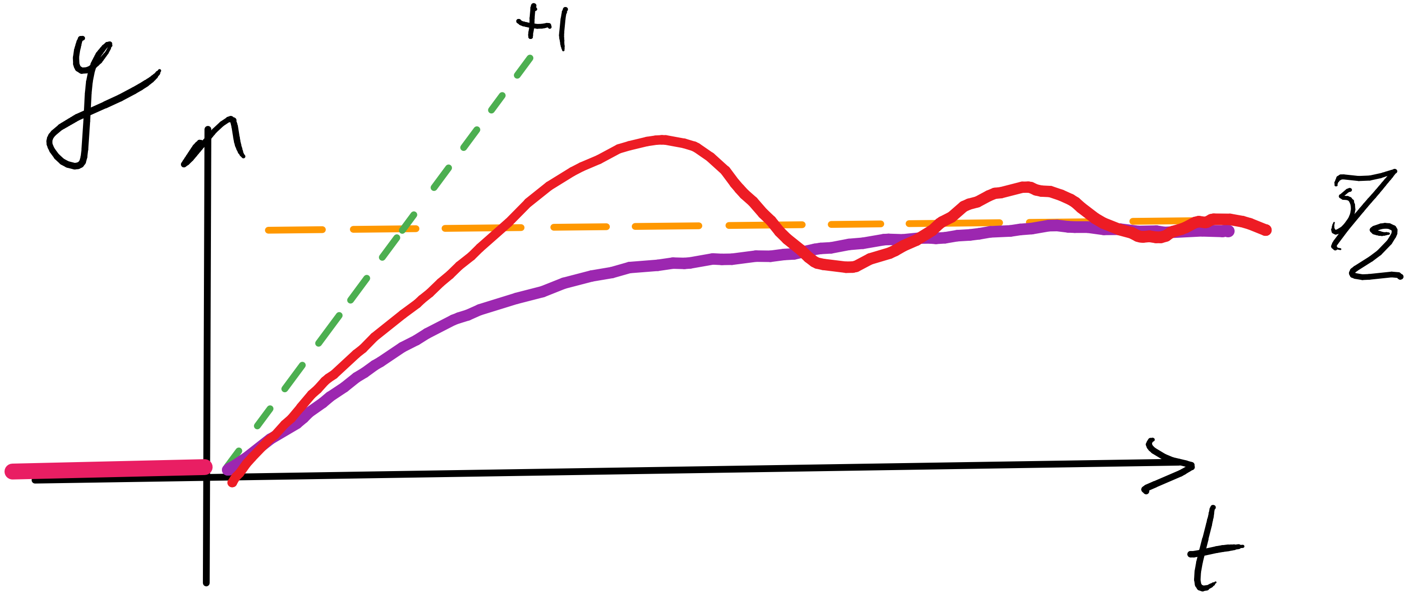
Ipotesi tutte soddisfatte

↳ si può applicare il Teorema!

Per il teorema del valor finale

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sY(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} = 5/2$$



$$Y(s)=\frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s+1}+\frac{C_3}{s+2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ $\mathcal{L}^{-1}$ $\mathcal{L}^{-1}$

$C_1\cdot 1(t)$ $\quad C_2 e^{-t}\cdot 1(t)$ $\quad C_3 e^{-2t}\cdot 1(t)$

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+2}$$

1° modo: formula dei residui

$$C_1 = \lim_{s \to 0} Y(s) \cdot s = \left. \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=0} = 5/2$$

$$C_2 = \lim_{s \to -1} Y(s)(s+1) = \left. \frac{s+5}{s(s+2)} \right|_{s=-1} = -4$$

$$C_3 = \lim_{s \to -2} Y(s)(s+2) = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 3/2$$

2° modo: principio ident. polinomi

$$\frac{s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+2}$$

$$= \frac{C_1(s+1)(s+2) + C_2\, s(s+2) + C_3\, s(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$s+5 = (c_1+c_2+c_3)s^2 + (3c_1+2c_2+c_3)s + 2c_1$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ 3c_1+2c_2+c_3=1 \\ 2c_1=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1=5/2 \\ c_2+c_3=-5/2 \\ 2c_2+c_3=-13/2 \end{cases}$$

$$c_1 = 5/2 \qquad c_2 = -4 \qquad c_3 = 3/2$$

$$Y(s) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s} + (-4)\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{s} \to 1(t) \qquad \frac{1}{s+1} \to e^{-t}\cdot 1(t) \qquad \frac{1}{s+2} \to e^{-2t}\cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right]\cdot 1(t)$$

Esercizio: utilizzo dei teoremi val. iniziale e finale

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s-3)}$$

Determinare:

$y(0) = ?$

$\dot{y}(0) = ?$

$\ddot{y}(0) = ?$

$\lim_{t \to \infty} y(t) = ?$

$y(t) = ?$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

$$y(0) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{(s-1)(s+3)} = 0$$

$\dot{y}(0) = ?$ $\qquad \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - \cancel{y(0)}^{\,0}$

$= sY(s)$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[sY(s)\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+5)}{(s-1)(s+3)}$$

$= +1$ //

$\ddot{y}(0) = ?$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - \underbrace{\dot{y}(0)}_{\cancel{2}\ +1}$$

$$= s\left[sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\right] - 1$$

$$= s^2 Y(s) - 1$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[s^2 Y(s) - 1\right]$$

$$= \lim_{s\to\infty} s \cdot \left[\frac{-(s-3)}{(s-1)(s+3)}\right] = -1$$

$y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = +1$

$\ddot{y}(0) = -1$

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = ?$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

NON si può utilizzare il teorema del valor finale

DEVO determinare $y(t)$!

$$Y(s) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{s+3}$$

$$c_0 = \lim_{s \to 0} Y(s) \cdot s = -1/3$$

$$c_1 = \lim_{s \to +1} (s-1) Y(s) = 1/2$$

$$c_2 = \lim_{s \to -3} (s+3) Y(s) = -\frac{1}{6}$$

$$Y(s) = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{s+3}$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow 1(t) \qquad \frac{1}{s-1} \rightarrow e^{+t}\cdot 1(t) \qquad \frac{1}{s+3} \rightarrow e^{-3t}\cdot 1(t)$$

$$y(t) = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right]\cdot 1(t)$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$