

Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: <http://control.units.it>

Trasformate
di Logflec

1^a parte

Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

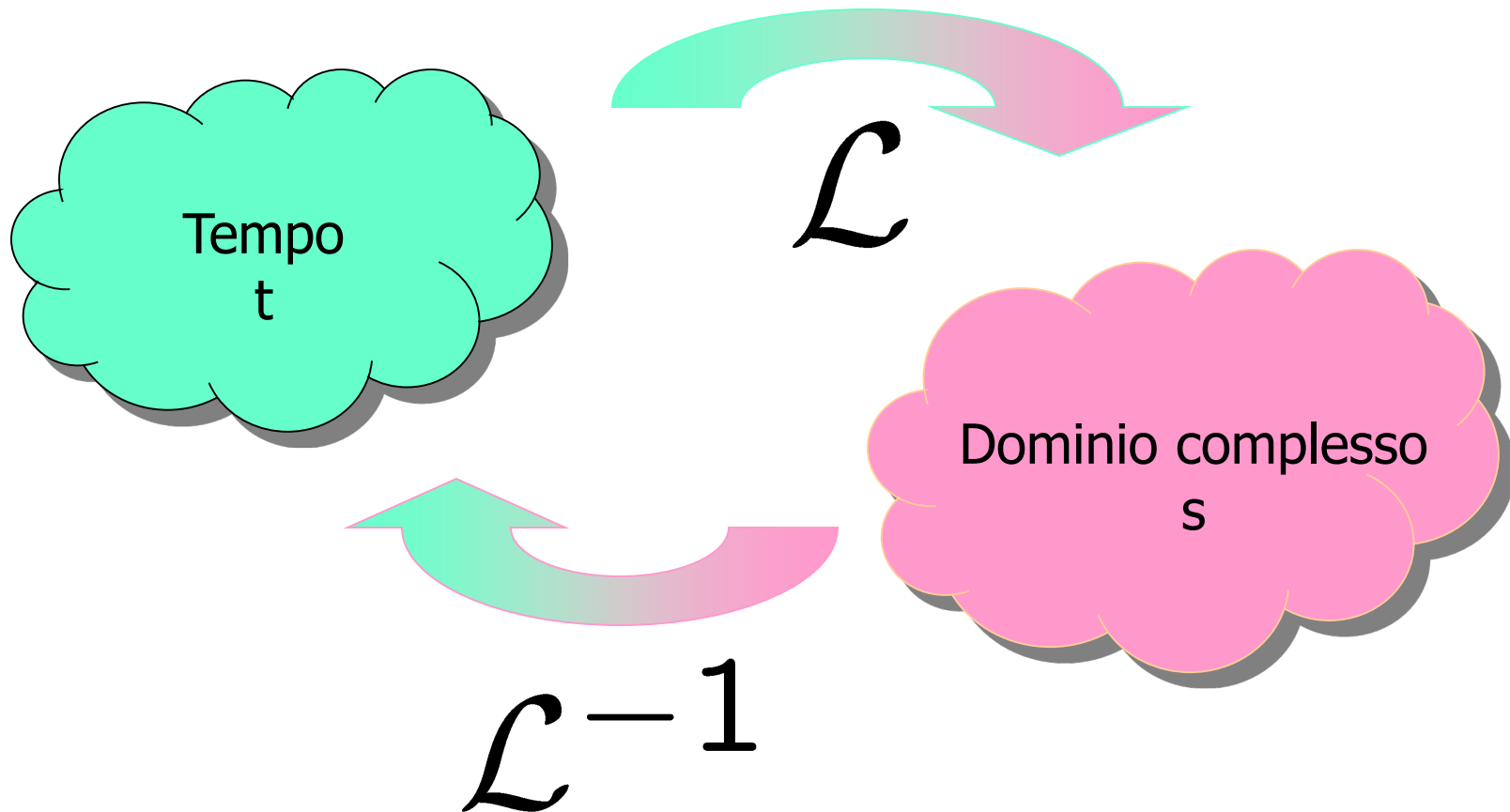


Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)



Metodi per risolverle ???

La trasformata di Laplace è un OPERATORE funzionale



Definizione: segnale causale

Si definisce **segnale causale** una **funzione** dipendente dal tempo (tempo continuo) che ha la proprietà

$$f(t) \equiv 0 \implies \forall t < 0$$

cioè una **funzione** che sia **identicamente nulla** per ogni istante di tempo che precede l'istante iniziale $t = 0$

Esempi:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \implies \forall t < 0 \\ 3.25 \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) & \implies \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \implies \forall t < 0 \\ 1 & \implies \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Definizione: trasformata di Laplace

Si considerano **funzioni causali** (non id. nulle solo per $t \geq 0$)
continue a tratti, senza comportamento impulsivo per $t = 0$
 Si definisce trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$s = \sigma + j\omega$
 $\text{Re}(s) > \bar{\sigma}$

Funzioni del
tempo

Funzioni
complesse

Perchè queste trasformate sono utili?



- 1. Hanno molte proprietà che aiutano a risolvere le equazioni differenziali ed integro/differenziali**
- 2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate di funzioni "notevoli"**

Proprietà

1. Linearità :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale: $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

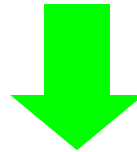
$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

Proprietà

$\leftrightarrow F(s)$

3. Trasformata della derivata: $f(t)$, $f'(t)$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0)$$



Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n \underbrace{F(s)} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}[f'(t)]\right\}$$

$$= s \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s [s F(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2F(s) - \sum_{0 \leq k}^{2-1} s^{2-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Proprietà

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

4. Traslazione in frequenza: se $k \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s - k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

Proprietà

6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

7. Moltiplicazione per t^n :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Proprietà

Def: integrale di convoluzione con f, g non nulle per $t \geq 0$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$g(t) \leftrightarrow G(s)$$

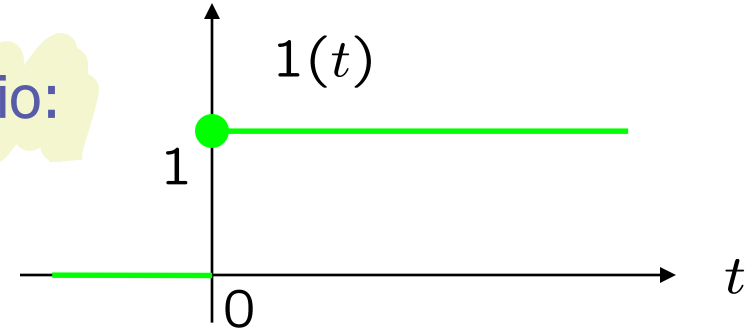
$f(t)$	$F(s)$
	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$t \cdot e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\omega(s - \sigma)}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$
$t \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{(s - \sigma)^2 - \omega^2}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \forall t < 0 \\ 1 & \Rightarrow \forall t \geq 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

$$1(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{scalină unitară}$$

rampa $\int_0^t 1(\tau) d\tau = t \cdot 1(t)$

$$\mathcal{L}\{t \cdot I(t)\} = ?$$

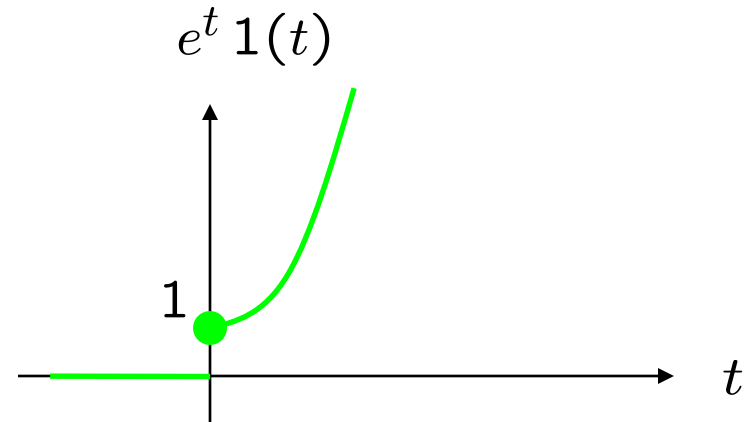
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t I(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau \cdot I(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{s^2}\right] = \frac{1}{s^3}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} t^2 \cdot I(t)$$

Trasformate notevoli

2. Trasformata
dell'esponenziale $e^t 1(t)$:

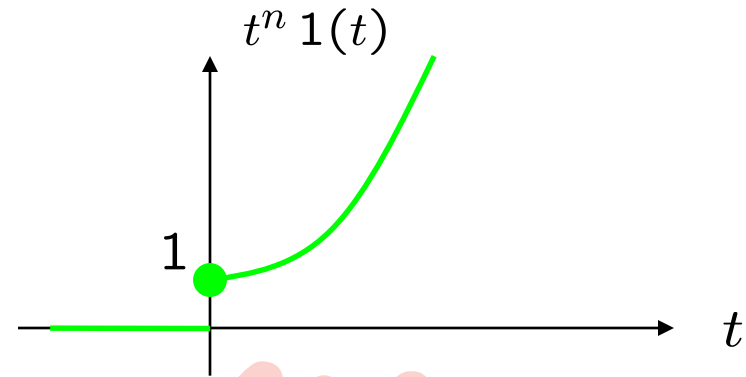


$$\mathcal{L}[e^{kt} 1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{k-s} [e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

Trasformate notevoli

3. Trasformata di $t^n 1(t)$:



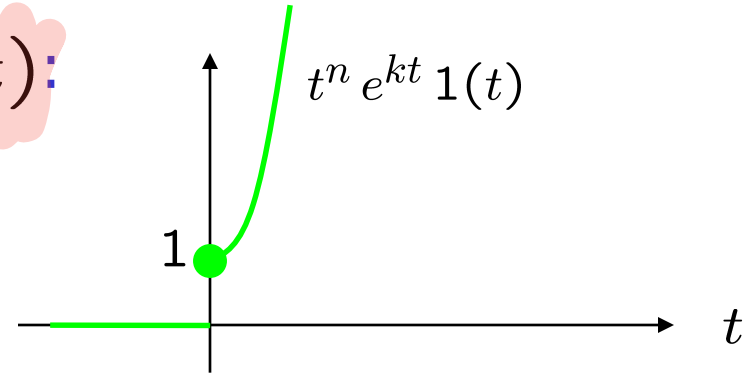
$$\mathcal{L}[t^n 1(t)] = (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}$$

...basta applicare la proprieta' di moltiplicazione per t^n ...

Trasformate notevoli

4. Trasformata di $t^n e^{kt} 1(t)$:



$$\mathcal{L}[t^n e^{kt} 1(t)] = \frac{n!}{(s - k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprietà di moltiplicazione per t^n e di traslazione in frequenza...

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[\frac{1}{s-k} \right]$$

Trasformate notevoli

Trasformata di $\sin(\omega t)$ e di $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi$$

Trasformate notevoli

5. Trasformata di $\sin(\omega t) 1(t)$:

$$\mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1(t) \right] = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Trasformate notevoli

6. Trasformata di $\cos(\omega t) 1(t)$:

$$\mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t) \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1 + 3t)u(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

- linearità della trasformata

$$\mathcal{L}\{y'' + 3y' + 2y\} = \mathcal{L}\{(1 + 3t) \cdot 1(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} =$$

$$= \mathcal{L}\{1(t)\} + 3\mathcal{L}\{t \cdot 1(t)\}$$

Se $u(t)$ e' un gradino unitario ed applichiamo le proprieta' viste:

$$\underbrace{\mathcal{L}\{y''(t)\}}_{\substack{\mathcal{L}\{y''(t)\} \\ \mathcal{L}\{y'(t)\}}} + \underbrace{\mathcal{L}\{y'(t)\}}_{\substack{\mathcal{L}\{y'(t)\} \\ \mathcal{L}\{y(t)\}}} = \{s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)\} + \{3 [s Y(s) - y(0)]\} + \dots$$

$$\dots + 2 Y(s) = \frac{1}{s} + \left[\frac{3}{s^2} \right] \mathcal{L}\{3t \cdot u(t)\}$$

$$\{s^2 Y(s) - s\} + \{3 [s Y(s) - 1]\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

ANTITRASFORMANDO

Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: <http://control.units.it>

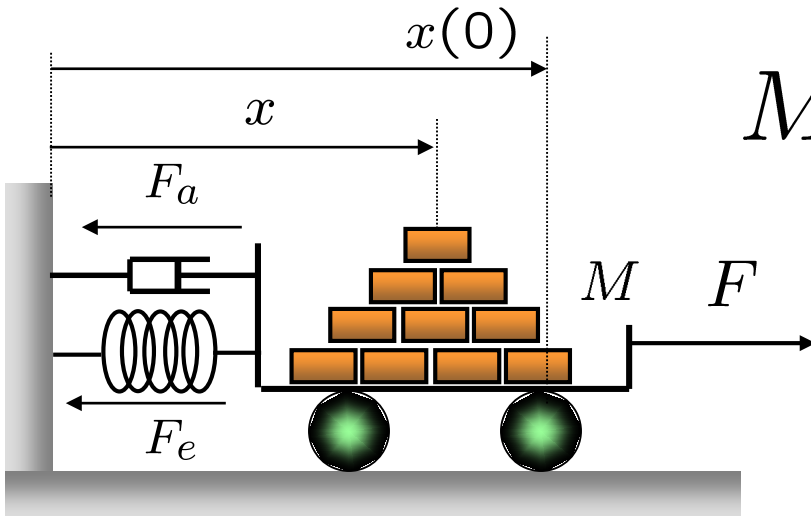
Trasformate di

Laplace

2^a parte

Applicazione:

sistema massa-molla (parte1, #39)



$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$

$$x(0) = r_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$x^0 \quad \mathcal{L}\{M\ddot{x}\}$$

$$M\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \dots$$

$$\dots + h\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{h\dot{x}\}$$

$$\mathcal{L}\{kx\}$$



$$X(s)\{Ms^2 + hs + k\} - \{Msr_0 + hr_0 + Mv_0\} = F(s)$$

$$X(s) = \frac{Msr_0 + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

“Risposta” libera

dipende dalle condizioni
iniziali

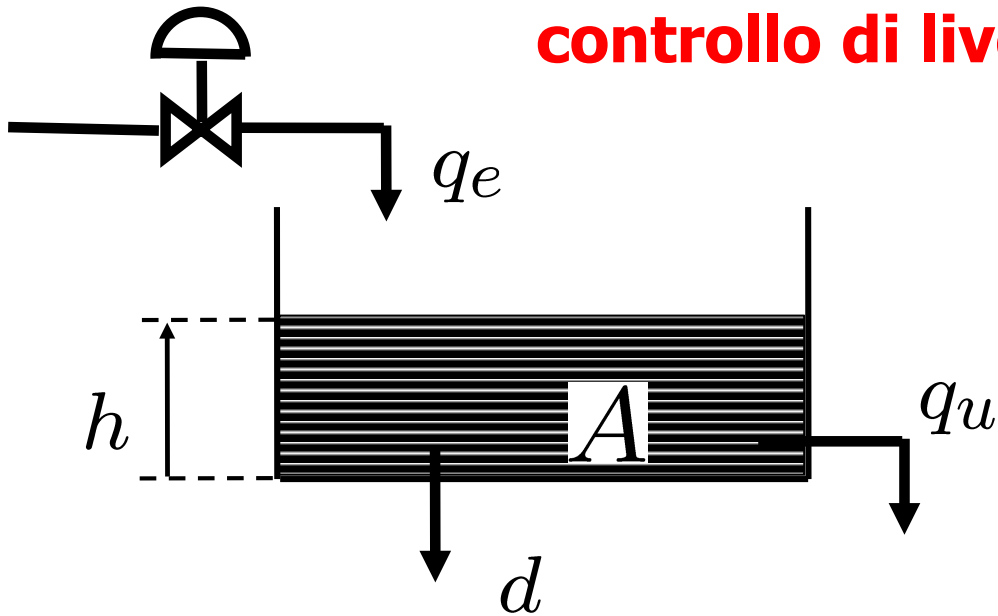
“Risposta” forzata

dipende dall'ingresso

$x(t)$

Applicazione:

controllo di livello (parte 1, #48)



Ipotesi:

- serbatoio infinito
- no disturbo
- controllore proporzionale

$$\left. \begin{array}{l} \dot{h} = -\frac{1}{A} (k + \mu) h + \frac{\mu}{A} h^0 \\ h(0) = 0 \end{array} \right\}$$

controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (h_0 e' il RIFERIMENTO !):

$$s H(s) = -\frac{1}{A} (k + \mu) H(s) + \frac{\mu}{A} \mathcal{L} \{ h^0(t) \}$$



$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L} \{ h^0(t) \}$$

risposta forata



$h(t)$

Antitrasformate

A partire da $F(s)$ si risale - sotto opportune ipotesi - ad $f(t)$ calcolando :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Che vale per $f(t)$ CAUSALE, cioè non nulla solo per $t \geq 0$

$\bar{\sigma} > \alpha$, l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di $F(s)$ sono a sinistra della retta individuata da $\bar{\sigma}$. **... non ne faremo uso ...**

Antitrasformate

Ci interessa
antitrasformare
funzioni razionali
fratte

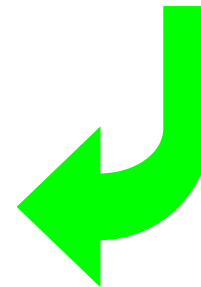


$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\deg(D) = n, \deg(N) = m$$

$$n > m$$

Non applicheremo mai la
definizione di
antitrasformata!



Antitrasformate

Deve essere $n > m$



Se $F(s)$ e' causale,
questa condizione e'
sempre verificata.



Altrimenti la teoria delle
trasformate ricorre alle
funzioni generalizzate...che
non vedremo

Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)^{m_1} (s - z_2)^{m_2} \dots (s - z_r)^{m_r}}{(s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = m \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$$

- avremo r zeri: $z_1, z_2, \dots, z_r \in \mathcal{C}$

di molteplicità $m_j \quad j = 1, \dots, r$

- avremo q poli: $p_1, p_2, \dots, p_q \in \mathcal{C}$

di molteplicità $n_i \quad i = 1, \dots, q$

Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere $F(s)$ come:

$$\begin{aligned} F(s) = & \frac{C_{1,1}}{(s - p_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_{2,1}}{(s - p_2)} + \dots + \frac{C_{2,n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_{q,1}}{(s - p_q)} + \dots + \frac{C_{q,n_q}}{(s - p_q)^{n_q}} \end{aligned}$$

Espansione in fratti semplici

Per la proprietà di linearità la sua antitrasformata si potrà calcolare così:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

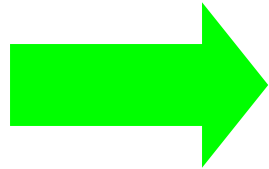
$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right] = \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Ancora per le proprietà di linearità, traslazione in frequenza e moltiplicazione per t^n .



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Espansione in fratti semplici



Se sappiamo **calcolare** i coefficienti
abbiamo automaticamente la $f(t)$

residui

$C_{i,j}$

- Metodo 1: basato sul principio di **identita'** dei polinomi \rightarrow va bene per poli a molteplicita' unitaria
- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui** \rightarrow va bene per poli multipli

Espansione in fratti semplici

RisolviAMO l'esercizio (parte 1L, #21) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi

a. "Risposta" libera

$$Y_l(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$z_1 = -3$$

$$p_1 = -1 \quad p_2 = -2$$

Per analogia col caso massa-molla!

b. "Risposta" forzata

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -2$$



$$Y_l(s) = \frac{C_1}{(s + 1)} + \frac{C_2}{(s + 2)}$$

Espansione in fratti semplici

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

2 eq. (n)
2 inc. (n)

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$e^{pt} \cdot I(A)$



$$Y_l(s) = \frac{2}{(s + 1)} - \frac{1}{(s + 2)}$$

$\frac{1}{s-p}$

$$\mathcal{L}^{-1} \{Y_l(s)\} = y_l(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

Espansione in fratti semplici

b. Metodo 2

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -1, n_1 = 1 \\ p_2 = -2, n_2 = 1 \\ p_3 = 0, n_3 = 2 \end{array} \right.$$

$$(s+1)(s+2)$$



$$Y_f = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s^2} + \frac{C_{3,2}}{s}$$

Espansione in fratti semplici

Per calcolare i coefficienti $C_{i,j}$ si applica questa formula:

$$C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{d s^{(n_i - j)}} F(s) (s - p_i)^{n_i} \right\}$$

Per poli di molteplicita' unitaria:

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

Detta formula di **Heaviside**

Derivata prima del denominatore!

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)^2} = \frac{C_{1,1}}{s-p_1} + \frac{C_{2,1}}{s-p_2} + \frac{C_{2,2}}{(s-p_2)^2}$$

$$Y(s) \cdot (s-p_1) = (s-p_1) \left[\frac{C_{1,1}}{s-p_1} + \dots \right]$$

↓

=

↓

$$\lim_{s \rightarrow p_1} Y(s)(s-p_1) = \lim_{s \rightarrow p_1} \left[C_{1,1} + (s-p_1) \left[\frac{C_{2,1}}{s-p_2} + \frac{C_{2,2}}{(s-p_2)^2} \right] \right]$$

\downarrow \downarrow
 $C_{1,1}$ 0

$$Y(s)(s-p_2)^2 = \left[\frac{C_{1,1}}{s-p_1} + \frac{C_{2,2}}{(s-p_2)^2} + \frac{C_{2,1}}{s-p_2} \right] (s-p_2)^2$$

\downarrow
 D

$$Y(s)(s-p_2)^2 = \frac{C_{1,1}}{(s-p_1)} \cdot (s-p_2)^2 + \frac{C_{2,1}}{(s-p_2)} (s-p_2)^2 +$$

$$+ \frac{C_{2,2}}{(s-p_2)^2} \cdot (s-p_2)^2$$

$$\lim_{s \rightarrow p_2}$$

$$Y(s)(s-p_2)^2 = \lim_{s \rightarrow p_2} \left[C_{2,2} + \right.$$

$$\left. = C_{2,2} \right]$$

$$+ (s-p_2) \left[C_{2,1} + \frac{C_{1,1}(s-p_2)}{(s-p_1)} \right]$$

→ 0

$$Y(s)(s-p_2)^2 = C_{2,2} + C_{2,1}(s-p_2) + C_{1,1} \frac{(s-p_2)^2}{s-p_1}$$

$$\frac{d}{ds} \left[Y(s) \cdot (s-p_2)^2 \right] = 0 + C_{2,1} + 2(s-p_2) \cdot \frac{C_{1,1}}{s-p_1} +$$

$$- C_{1,1} \frac{(s-p_2)^2}{(s-p_1)^2}$$



$$\frac{d}{ds} \left[Y(s) (s - p_2) \right]^2 = C_{2,1} + (s - p_2) \left[\frac{2 C_{1,1}}{s - p_1} + \frac{C_{1,1}(s - p_2)}{(s - p_1)^2} \right]$$

$$\lim_{s \rightarrow p_2} \frac{d}{ds} \left[Y(s) (s - p_2) \right]^2 = C_{2,1}$$

Espansione in fratti semplici

Dunque finiamo l'esercizio:

$$C_{1,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2 \quad \rightarrow \quad p_1$$

$$C_{2,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad p_2$$

$$C_{3,1} = \frac{d}{ds} \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow (s) \\ \} \\ \rightarrow (s^2) \end{array} \right\} p_3$$

$$C_{3,2} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow (s^2)$$

Espansione in fratti semplici

Espressione finale di $Y_f(s)$:

$$Y_f = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{4(s+2)} - \frac{1}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left[\frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \right] \cdot 1(t) \quad t \geq 0$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Fondamenti di Automatica

Prof. Thomas Parisini e Prof. Gianfranco Fenu
DIA-Università di Trieste
Tel. (Parisini) 334 6936615
Email: parisini@units.it, fenu@units.it
URL: <http://control.units.it>

Trasformate di Laplace

parte 3

Applicazione: sistema massa-molla

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s) = \frac{Mr_0s + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \\ r_0 = 0, \quad v_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

Se $F(t)$ e' un gradino

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

Espandendo in fratti semplici:

$$\Delta = h^2 - 4kM$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s + \frac{h}{2M} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_2}{s + \frac{h}{2M} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_3}{s}$$

$$x(t) = \left[C_1 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_2 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_3 \right] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

Vedi (parte 1, #41-42) $\Rightarrow x(t) = [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + C_3] \cdot 1(t)$

Si e' gia' visto l'andamento della $x(t)$ a seconda che le radici siano reali o complesse.

\Rightarrow segno di $\sqrt{\Delta}$!

Applicazione:

controllo di livello

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L} \{h^0(t)\}$$

$$H(s) = \left[\frac{C_1}{s + \frac{(k + \mu)}{A}} + \frac{C_2}{s} \right]$$



$$h^0(t) = h^0 1(t)$$

$$h^0(s) = h^0 \frac{1}{s}$$

dopo qualche passaggio ...

$$h(t) = \frac{\mu h^0}{k + \mu} \left(1 - e^{-\frac{(k + \mu)}{A} t} \right) \cdot 1(t)$$

vedi (parte 1, #51)

Proprieta'

Vediamo ancora due proprieta' molto importanti:

Teorema del valore iniziale

IPOPOTESI: $F(s)$ strettamente propria, cioe' $n > m$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Proprieta'

Teorema del valor finale

IPOSTESI: Tutti i poli sono nel semipiano sinistro, con al piu' un polo di molteplicita' unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

TESI: se le ipotesi sono soddisfatte ALLORA i due limiti esistono entrambi finiti ed assumono valori UGUALI.

E' un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della $f(t)$ direttamente dalla sua trasformata di Laplace!

Teorema del valor finale: esempi

Applicazione corretta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1}$$

C'e' un solo polo a parte reale negativa



Applicazione scorretta:

~~$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t) \quad ? \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega} = 1$$~~

IPOTESI NON SODDISFATTE!

poli
immaginari

Ci sono due poli immaginari puri!



$$\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t)$$

Esercizi

1. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)^2} \longrightarrow \frac{C_1}{(s + 1)} + \frac{C_{2,1}}{(s + 2)} + \frac{C_{2,2}}{(s + 2)^2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow (-1)} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)^2} \cancel{(s + 1)} = -2 \right\}$$

$$C_{2,1} = \lim_{s \rightarrow (-2)} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \right\} = 2$$

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \right\} = 7$$

Antitrasformiamo :

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} + \frac{7}{(s+2)^2}$$



$$f(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 7te^{-2t}$$



fine!

2. Carica e scarica di un circuito RC parallelo:

Equazioni di stato

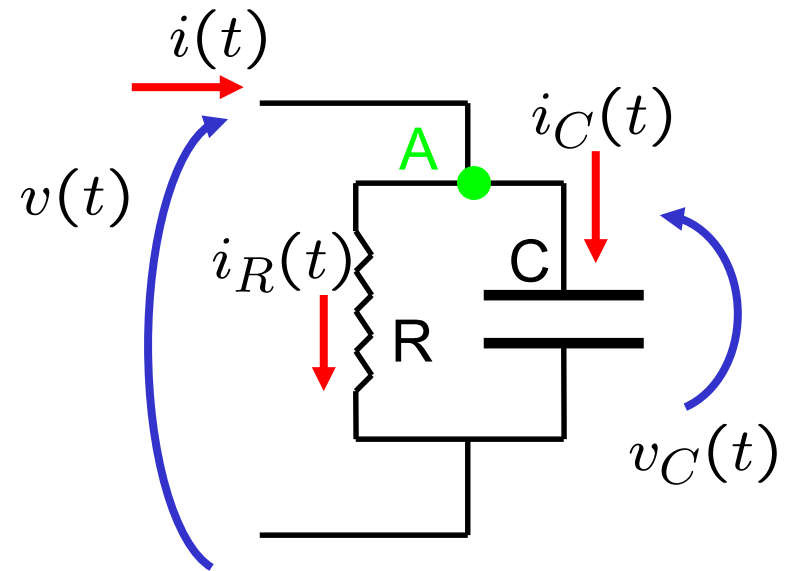
Per il secondo principio di Kirchhoff (al nodo A):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} + C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

$$v_R(t) = v_C(t) = v(t)$$

$$\frac{y(t)}{R} + C \frac{d}{dt} y(t) = u(t)$$



$$\begin{cases} i(t) = u(t) \\ v_C(t) = y(t) \end{cases}$$

a) Ingresso nullo, ma con condizioni iniziali diverse da zero : il circuito si scarica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = 0$$

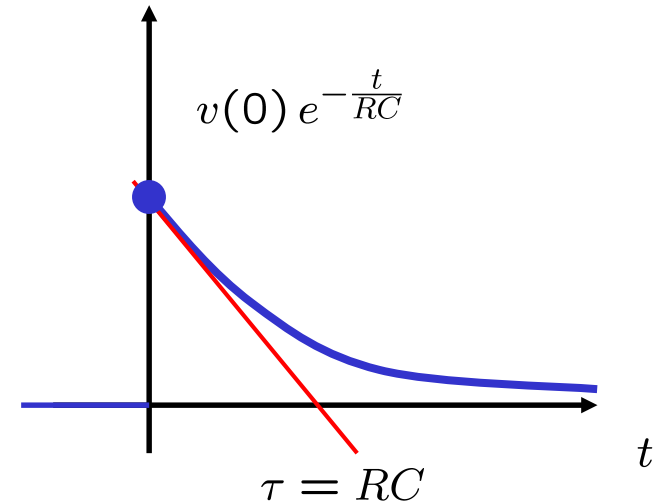
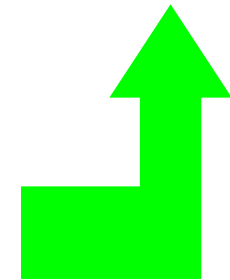
Applichiamo la trasformata di Laplace:

$$\frac{Y(s)}{RC} + sY(s) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = y(0) \frac{RC}{sRC + 1} = y(0) \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$



$$v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$



b) Soluzione ad ingresso diverso da zero, ma condizioni iniziali nulle : il circuito si carica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = \frac{u(t)}{C}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{C} \frac{RC}{sRC + 1} = \frac{U(s)}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Se l'ingresso e' un gradino in corrente:

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \frac{1}{sC}$$

Allora espandiamo in fratti semplici...

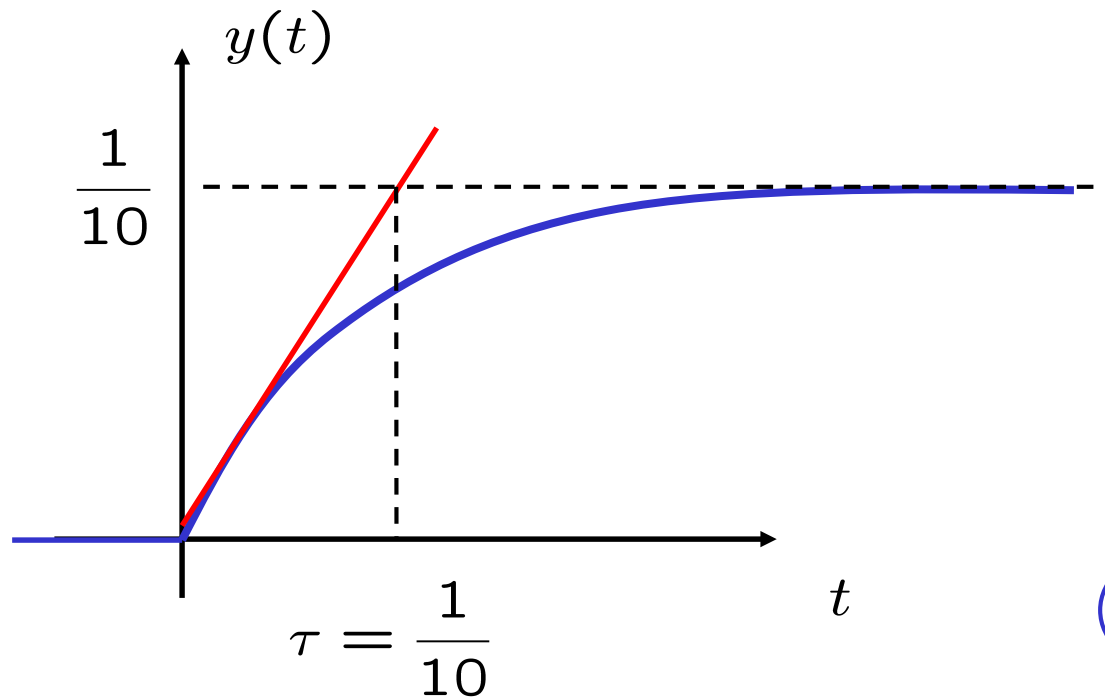


Se $R=10$, $C=1$ si ha $RC=10$ e dunque:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+10)} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s+10} + \frac{B}{s} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{s(s+10)} \cancel{(s+10)} \Big|_{s=-10} = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{1}{\cancel{s}(s+10)} \cancel{(s)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

$$y(t) = \left\{ -\frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10} \right\} 1(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}) 1(t)$$



fine!

3. Antitrasformare la funzione:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

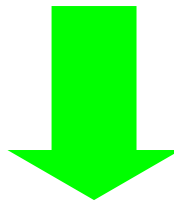
$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow (-1+j2)} F(s) (s + (1 - j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \rightarrow (-1-j2)} F(s) (s + (1 + j2)) = 3 - j4$$



$$f(t) = 1(t) + (3 + j4)e^{-(1-j2)t} + (3 - j4)e^{-(1+j2)t}$$

Che non e' molto agevole perche' presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = 1(t) + 10e^{-t}(\cos(2t + \phi)) \quad \phi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Ma si poteva anche operare diversamente, accoppiando i poli complessi e coniugati:

$$\frac{3 + j4}{(s + 1 - j2)} + \frac{3 - j4}{(s + 1 + j2)} = \dots = \frac{6(s + 1) - 16}{(s + 1)^2 + (2)^2}$$

$$\dots = 6 \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + (2)^2} - 8 \frac{2}{(s + 1)^2 + (2)^2}$$

Antitrasformando \rightarrow ricordare la proprieta' di traslazione in frequenza:

$$f(t) = 1(t) + 6e^{-t} \cos 2t - 8e^{-t} \sin 2t$$



fine!

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s+p)} + \frac{C_2^*}{(s+p^*)} \Rightarrow \frac{as+b}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\frac{K_1(s+\sigma) + K_2\omega}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$(K_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t} \sin(\omega t)) 1(t)$$

$f(t)$	$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{2}{s^3}$
$e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$t \cdot e^{\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$
$t \cdot e^{\sigma t} \cdot \sin(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{2\omega(s - \sigma)}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$
$t \cdot e^{\sigma t} \cdot \cos(\omega t) \cdot 1(t)$	$\frac{(s - \sigma)^2 - \omega^2}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$

Tabella 1: Segnali e corrispondenti trasformate di Laplace

4. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 6s + 8}{(s - 1)^3(s + 2)^2}$$

Abbiamo già i poli...stavolta facciamo attenzione agli **zeri**!!

Infatti ci sono delle **semplificazioni** fra numeratore e denominatore: un fattore $(s + 2)$ si elimina... Magari non ce ne siamo accorti... 😞
Ma facendo i calcoli nell'espansione in fratti semplici il coefficiente $C_{2,2}$ legato ad $(s + 2)^2$ risulterà nullo!

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} F(s)(s + 2)^2 = \dots = 0$$



Se nell'espansione un coefficiente risulta NULLO significa che ci sono delle semplificazioni di cui non ci si è accorti.



fine!