Propagazione degli errori

$$x = x_m \pm \delta x$$

se ho una funzione $f(x)$

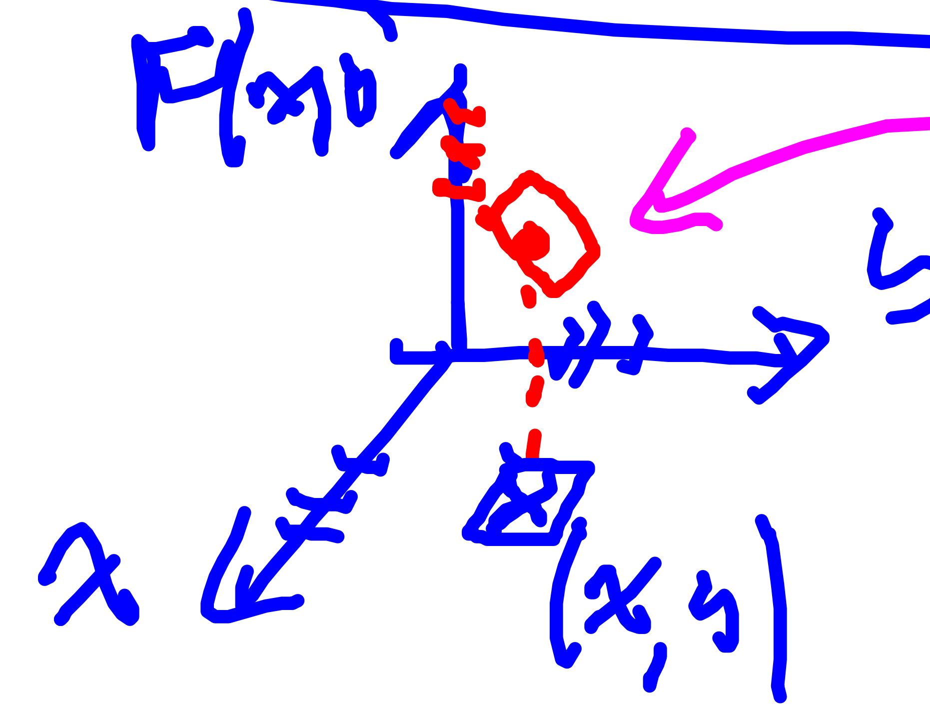
$$\delta f(x) = \left| \frac{d f(x)}{dx} \right|_{x_m} \delta x$$

se ho più variabili INDIPENDENTI

e una funzione $F(x, y, z, \dots)$

$$\delta F \leq \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \delta y + \dots$$

NO!



δF data dal gradiente

$$\delta F = \sqrt{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|^2 \delta x^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|^2 \delta y^2 + \dots}$$

Propagazione degli errori

$$f(x,y) = x^2 y - x y^2$$

q

$$x = 3.0 \pm 0.1$$
$$y = 2.0 \pm 0.1$$

$$q = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 6.0$$

$$\delta q_x = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x = (2xy - y^2)\,\delta x$$
$$= (2 \cdot 3 \cdot 2 - 4)\, 0.1$$
$$= 0.8$$

$$\delta q_y = \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y = (x^2 - 2xy)\,\delta y$$
$$= |9 - 2 \cdot 3 \cdot 2|\,\delta y = 0.3$$

metodo lineare (sovrastima)

$$\delta q = \delta q_x + \delta q_y = \underline{1.1}$$ NO

metodo quadratico

$$\delta q = \sqrt{0.8^2 + 0.3^2} = \underline{0.9}$$ OK

$$q = 6.0 \pm 0.9$$ ✓

Misure ripetute

analisi statistica dei dati

↳ metodi

1 – fornire una descrizione sintetica
2 – confronto tra dati e teoria
3 – interpretazione probabilistica del fenomeno

1. DESCRIZIONE = calcolare i "momenti" di una distribuzione statistica

– ho un set di N misure x_i

MEDIA $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

VARIANZA

$$Var(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Misure ripetute

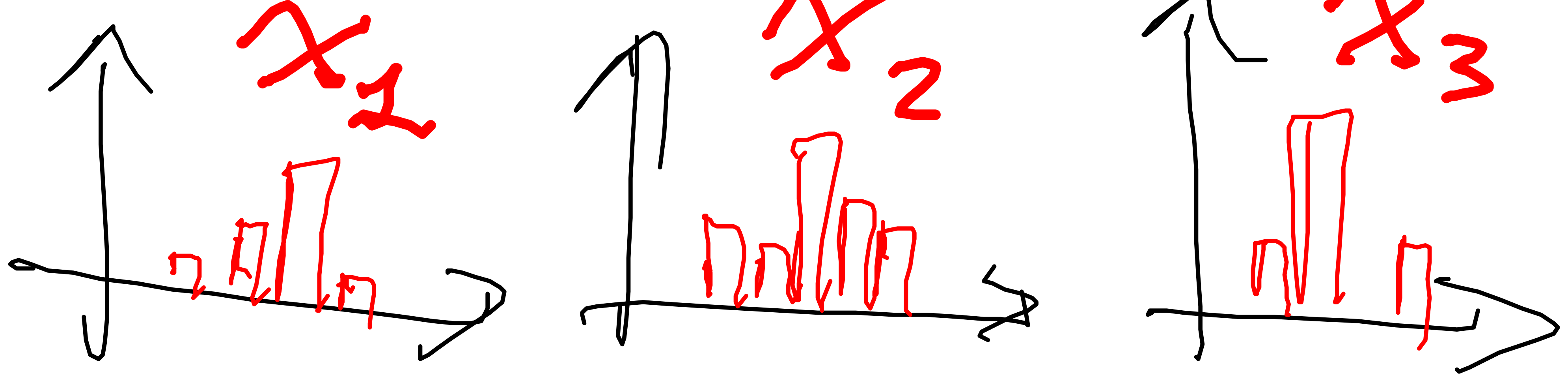
INDICE

se faccio più SET di misure

- ogni set ha 20 misurazioni (n) i
- faccio 10 di questi set (N) j

per ogni set posso calcolare $\bar{x}_j$ e σ_j

$\bar{x}_1$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_N$



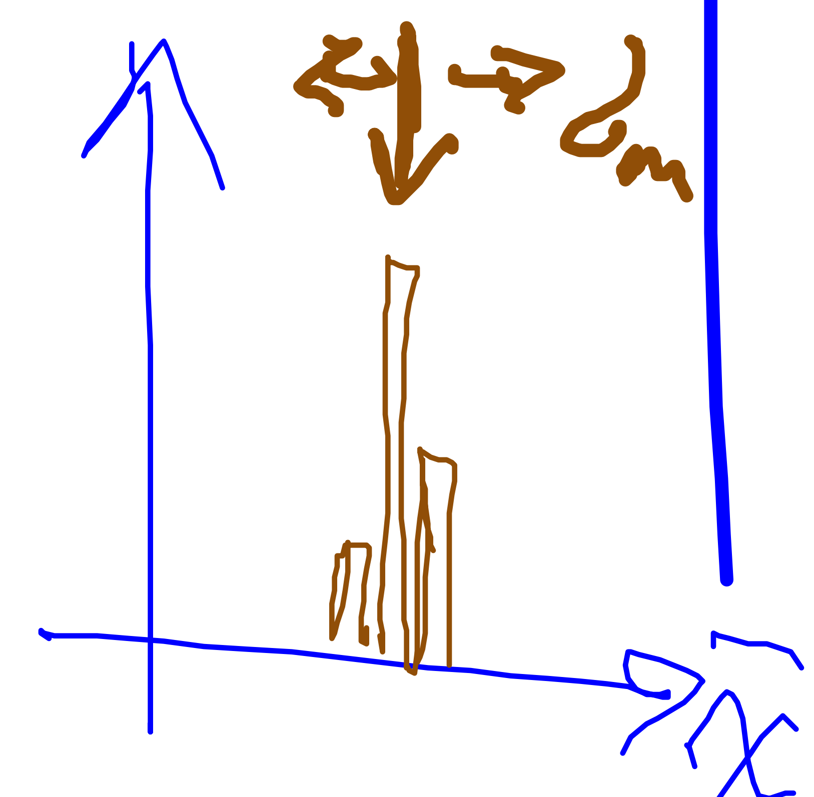
$$S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$$

variabilità delle medie

$$\sigma_m = \frac{\sigma^*}{\sqrt{N}}$$

$\bar{\bar{x}}$

σ_m



$\bar{x}$

me

$n = 20$

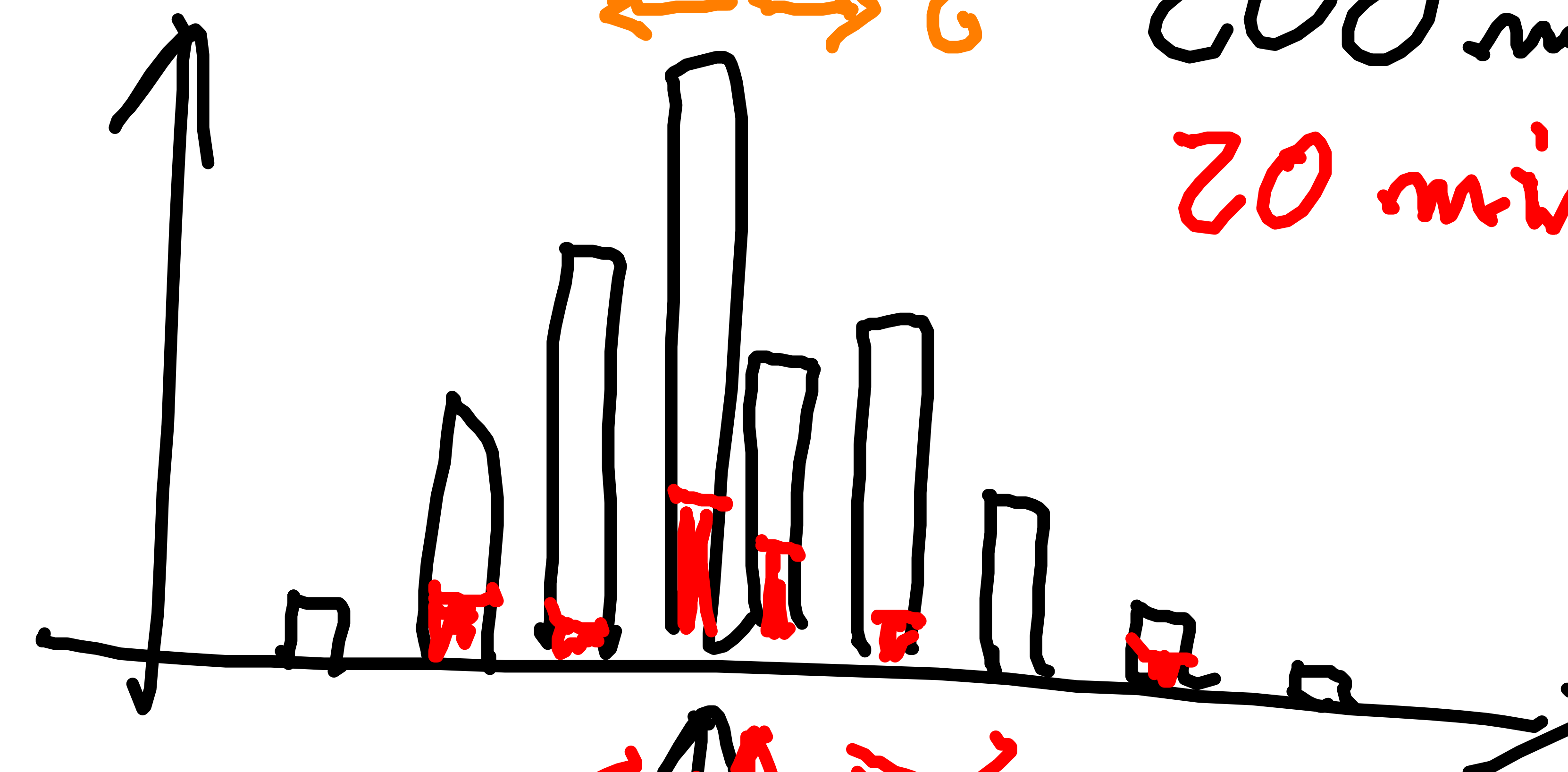
$N = 10$

ho 200 misure

$\bar{\bar{x}}$

σ^* 200 misure

20 misure



σ_j

$\bar{x}_j$

$\bar{\bar{x}}$

σ^*

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2}{199}}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2}{10 \cdot 199}} = \frac{\sigma^*}{\sqrt{10}}$$

Variabilità statistica

→ probabilità che la mia misura abbia un certo valore

PROBABILITÀ MATEMATICA

ho un insieme di eventi

$$S = \{E_1, E_2, E_3, \dots, E_N\}$$

probabilità del singolo evento

$$\boxed{P(E_i) \in \mathbb{R}}$$

- $P(E_i) \geq 0$
- $\sum_i P(E_i) = 1$
- $P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

eventi mutualmente esclusivi

PROBABILITÀ EMPIRICA

- ho esperienze ripetute N volte
- ho un certo evento E che si verifica M volte

$$P_{emp}(E) = \frac{M}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} P_{mat}(E)$$

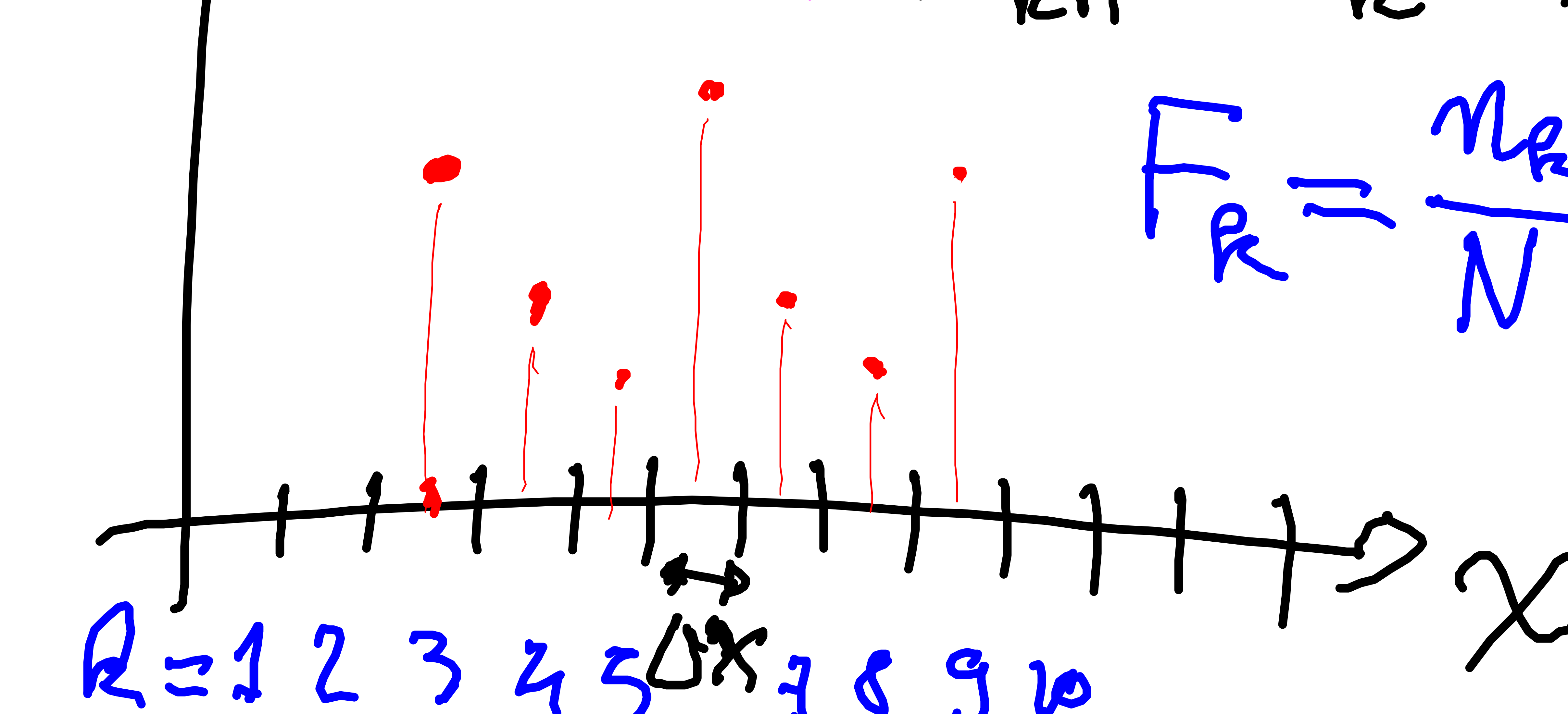
Variabilità statistica

vediamo meglio cosa accade quando $N \to \infty$

- supponga di avere x_k misure con $k = 1..N$
- le misure non coincidono mai esattamente

$\longrightarrow$ scelgo Δx

ridefinisco $\longrightarrow$ $x_{k+1} = x_k + \Delta x$



$$F_k = \frac{n_k}{N}$$

x_1 è stato misurato n_1 volte

x_2 n_2

x_3 n_3

$$F_1 = \frac{n_1}{N} \quad F_2 = \frac{n_2}{N} \quad F_3 = \frac{n_3}{N}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N$$

se $N \to \infty$

posso avere $\Delta x \to 0$

posso definire $p_k = \dfrac{F_k}{\Delta x}$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$p_k \Delta x \to p(x)\,dx = dP$$

Variabilità statistica

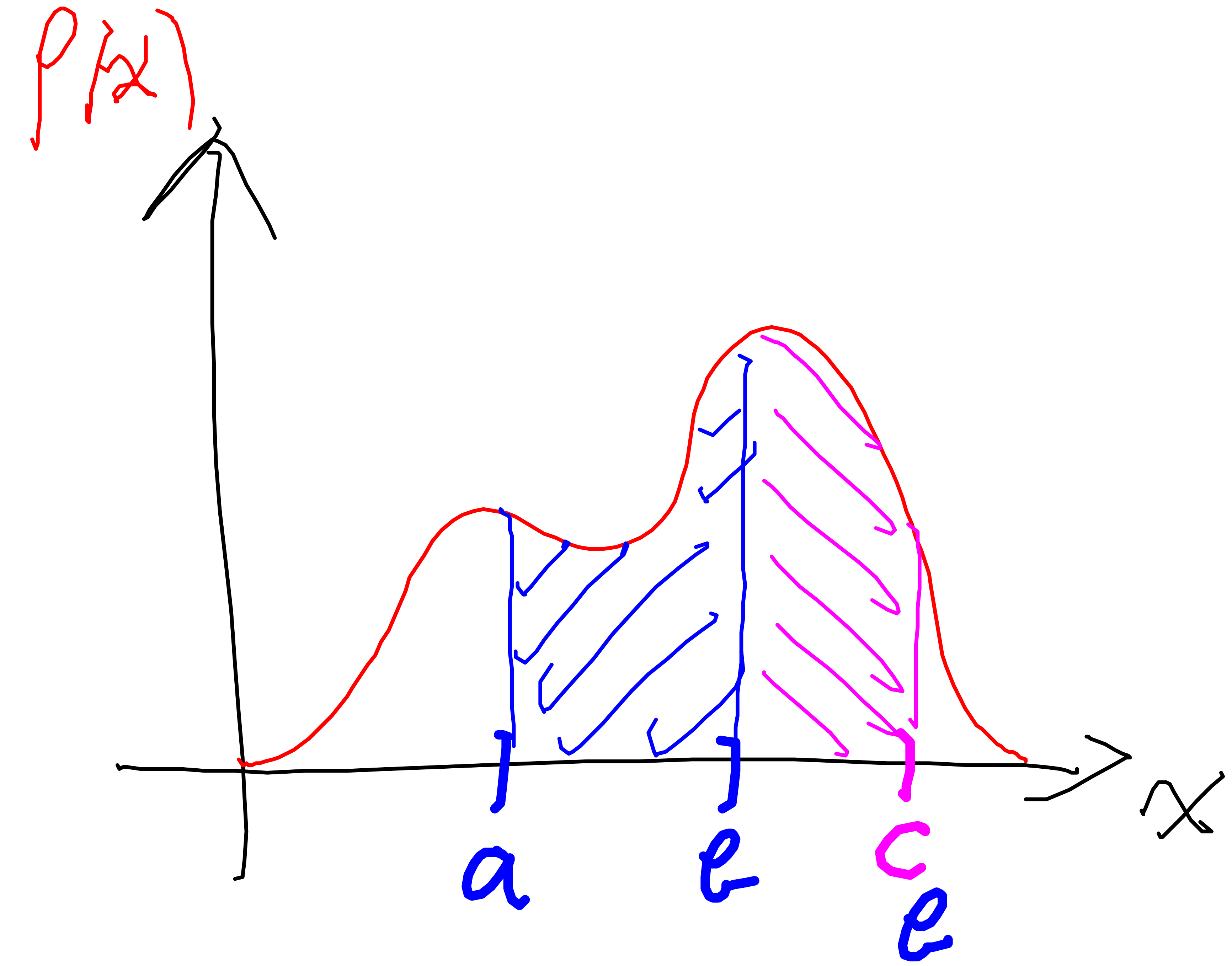
se prima avevo Δx finito e F_k associato a x_k

F_k è la probabilità che il mio valore cada tra $\left(x_k - \frac{\Delta x}{2}\right)$ e $\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}\right)$

se ora ho dx

$$P(x-\delta x \le x \le x+\delta x) = \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} dP = \int_{x-\delta x}^{x+\delta x} \rho(x)\,dx$$

$$\boxed{\rho(x) = \frac{dP}{dx}}$$



$$P(a \le x \le b) = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

$$P(a \le x \le c) = P(a \le x \le b) + P(b \le x \le c)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1$$

"normale"