

# INCERTEZZE e ERRORI

Esempi di cifre significative

$$m = 500g \quad 3 \text{ c.s.}$$

$$v = 3.0 \text{ m/s} \quad 2 \text{ c.s.}$$

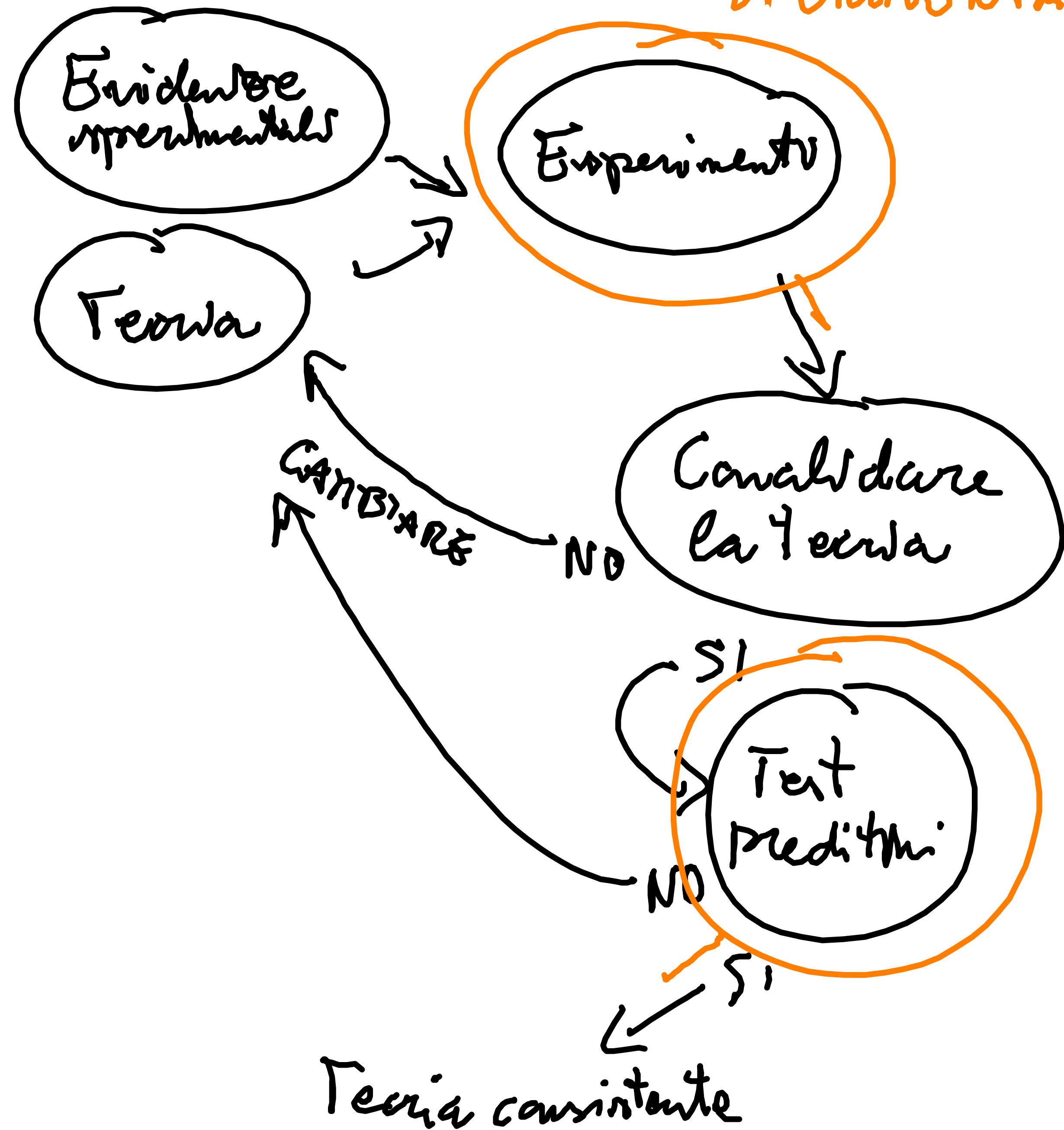
$$\tau = 49 \text{ Nmm} \quad 2 \text{ c.s.}$$

Cifra dubitativa

→ testimonia il grado di precisione di una misura

## Metodo scientifico

ERRORI  
SPERIMENTALI



# Tipi di errori

## - Errori SISTEMATICI

- si ripresentano ad ogni misura
- hanno sempre lo stesso "verso"

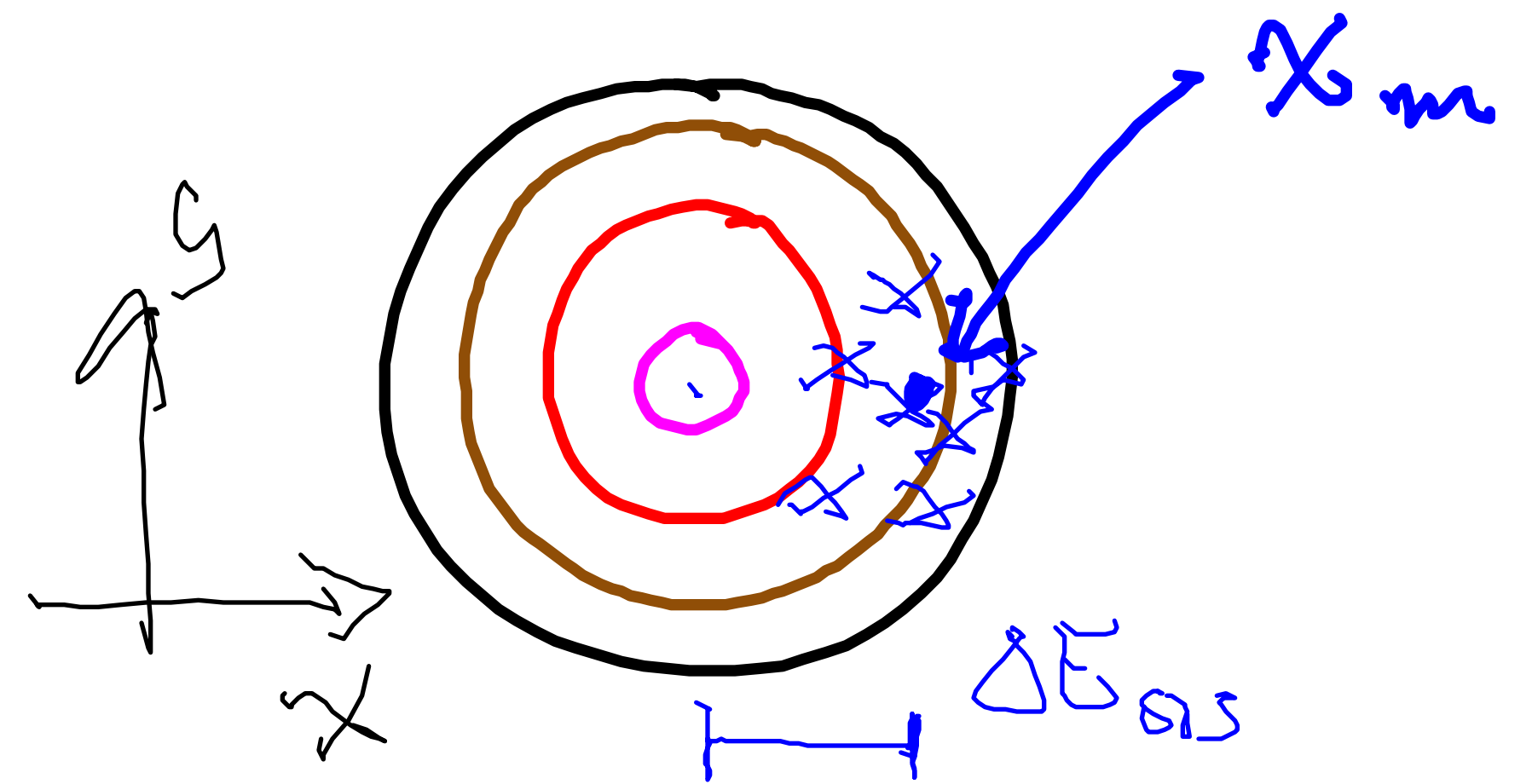
## ACCURATEZZA

## - Errori ACCIDENTALI o STATISTICI

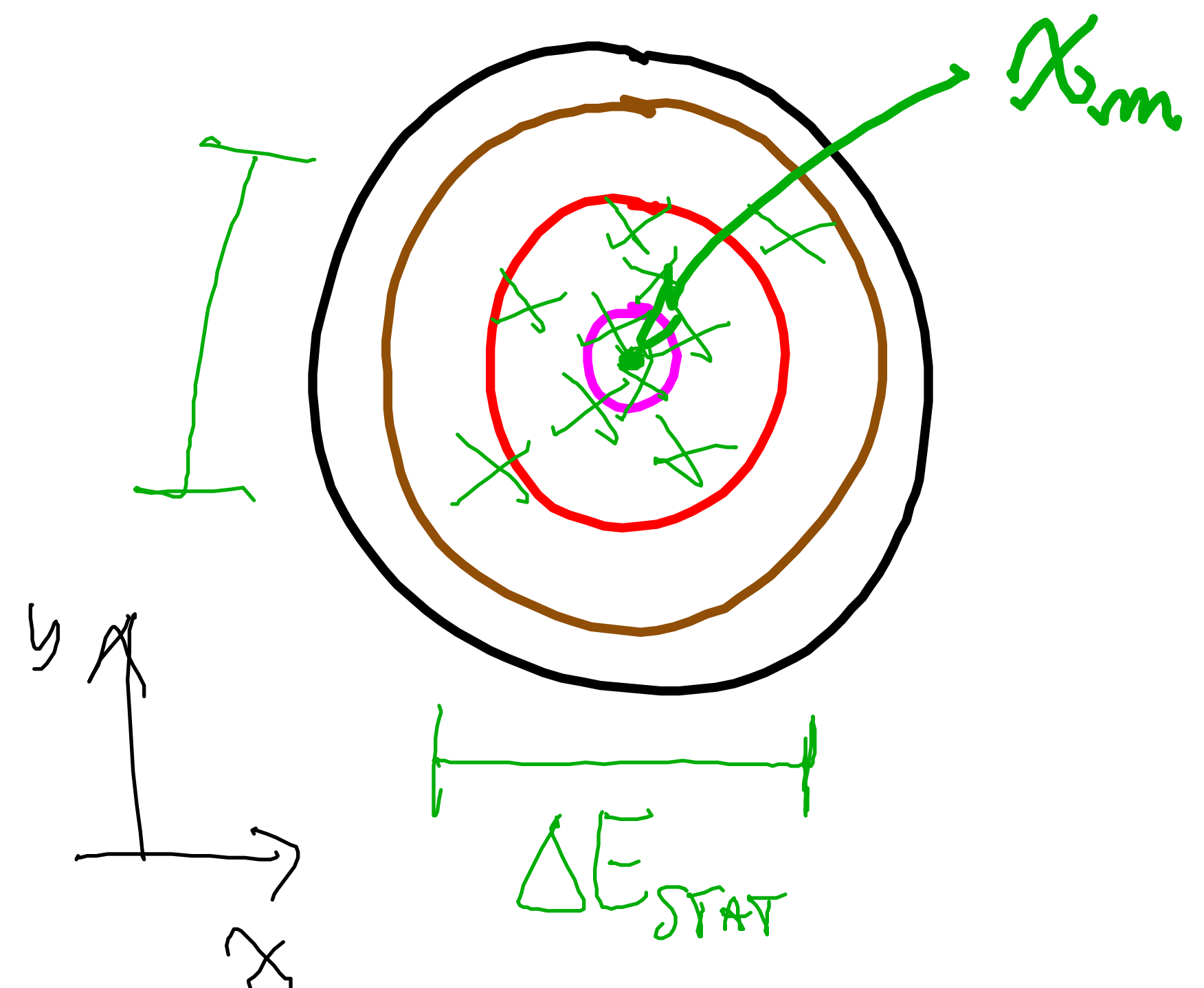
- dovuti a perturbazioni
- non prevedibili (su singola misura)
- analizzabili

## PRECISIONE

## SISTEMATICO



## STATISTICO



# Definizione di errore

$$X = X_m \pm \Delta X$$

↑  
misura  
compilata

↑  
migliore  
stimma

↑  
incertezza

sono ragionevolmente certi  
che il valore "vero" o il valore  
di aspettazione delle prossime  
misure ricada dentro l'intervallo

$$[X - \Delta X; X + \Delta X]$$

ragionevolmente?

al 100%?

- SI! errore  
MASSIMO

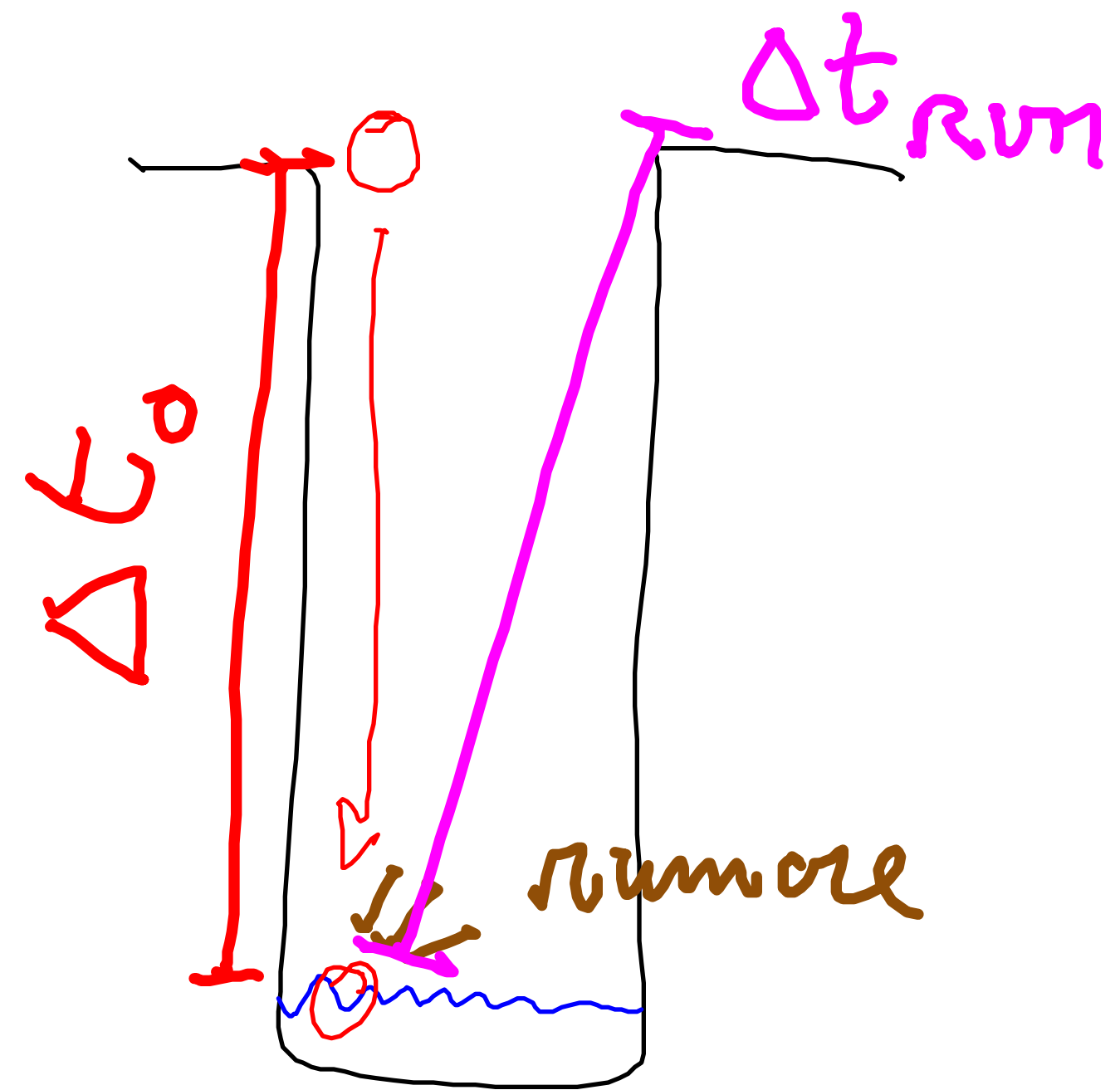
precisione sistema di misura  
- analogico: SENSIBILITA'  
- digitale: ultima cifra signif.

- NO! errore  
STATISTICO

nell'intervallo  $[X - \Delta X; X + \Delta X]$   
ricade il 65% delle misure

# Esempio

Voglio stimare l'altezza di un pozzo  
misurando il tempo di caduta di  
un masso



misuro  $\Delta t$  da quando precipita  
a quando sento il rumore

$$\Delta t = 2.5 \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 = 30.65 \text{ m}$$

$$\Delta t \approx h/v_{\text{suono}} \approx \frac{31}{330} = 0.1 \text{ s}$$

SISTEMATICO

$$\Delta t = 2.5 - 0.1 \text{ s}$$

$$h_0 = \frac{1}{2} g (\Delta t - 0.1)^2 = 28.2 \text{ m}$$

$$h = 30.65 - 2.4 \text{ m}$$

$$\frac{0.1}{2.5} \approx 0.04 = 4\%$$

$$\frac{2.4}{30.65} = 0.08 = 8\%$$

valore	errore
30.65	2.4

Convincere valore misurato  
con l'errore

① mantenere l'errore con  
UNA SOLA CIFRA SIGNIFICATIVA \*

② arrotondare il valore misurato  
finché la sua cifra dubitativa  
sia quella che costituisce l'errore

valore	errore
31	2

\* se la prima cifra  
sign. dell'errore è un  
1, aggiungere una seconda  
cifra

$$2.4 \pm 1.0$$

$$\text{errore relativo} = \frac{1.0}{2.4} = 40\%$$

$$2.4 \pm 1.4$$

$$\text{errore relativo} = \frac{1.4}{2.4} = 60\%$$

se arrotondassi

$$2 \pm 1$$

$$\text{errore relativo} = \frac{1}{2} = 50\%$$

At lma di  $g$

$$g = 9.823 \pm 0.02583 \text{ m/s}^2$$

↓ ①

$$\pm 0.03$$

↓ ②

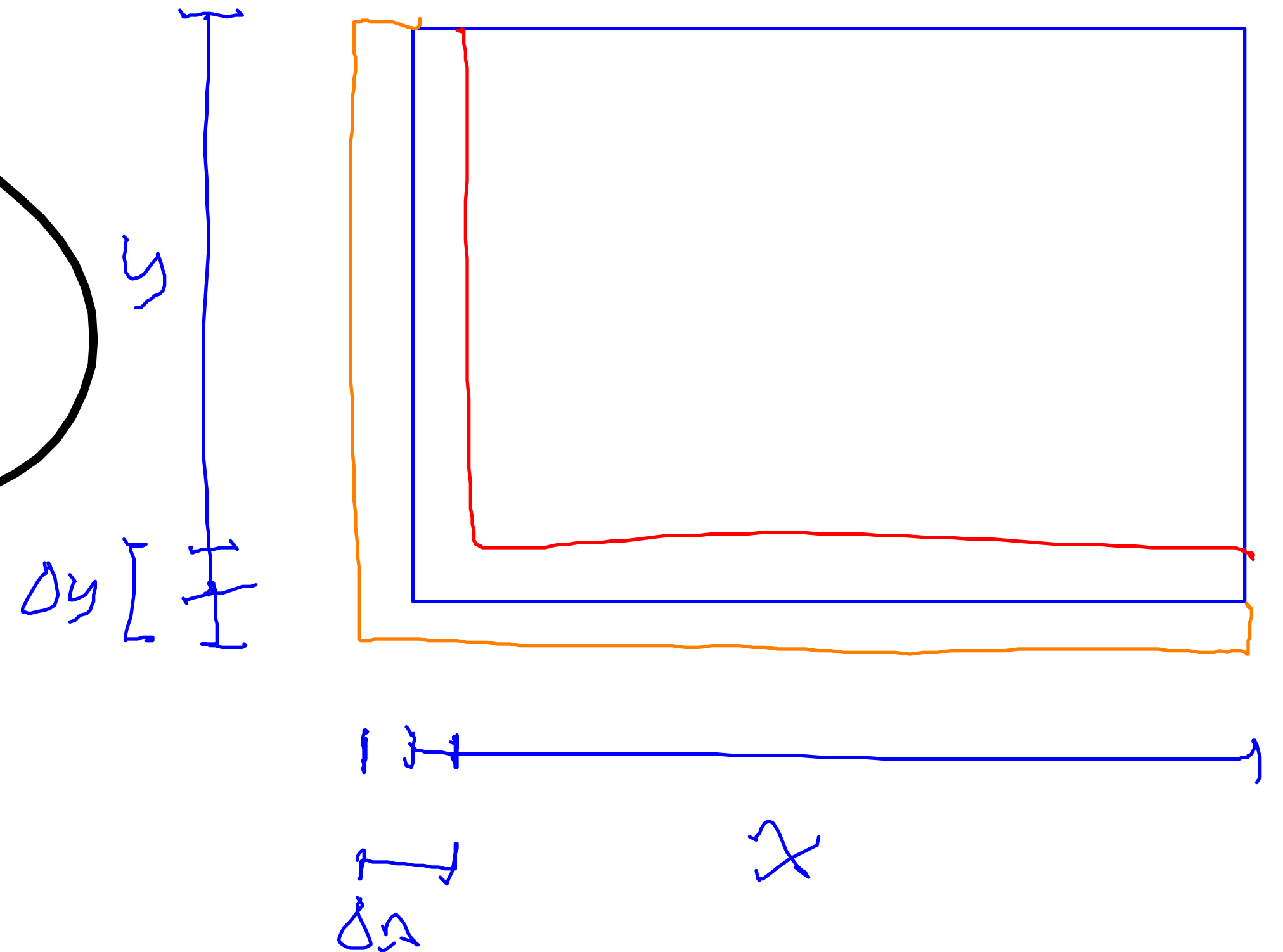
$$9.82 \pm 0.03$$

# Propagazione degli errori

ho misure  
con errori  
associati



per calcolare  
l'errore associato  
quantità derivate



$$x \pm \Delta x \quad \text{base}$$

$$y \pm \Delta y \quad \text{altezza}$$

$$(x + \Delta x) \text{ e } (y + \Delta y)$$
$$(x - \Delta x) \text{ e } (y - \Delta y)$$

SOMME O SOTTRAZIONI

→ somma gli errori!

$p$ : semiperimetro =  $x + y$   
 $\Delta p = ?$

$$P_{max} = (x + \Delta x) + (y + \Delta y)$$
$$= x + y + (\Delta x + \Delta y)$$

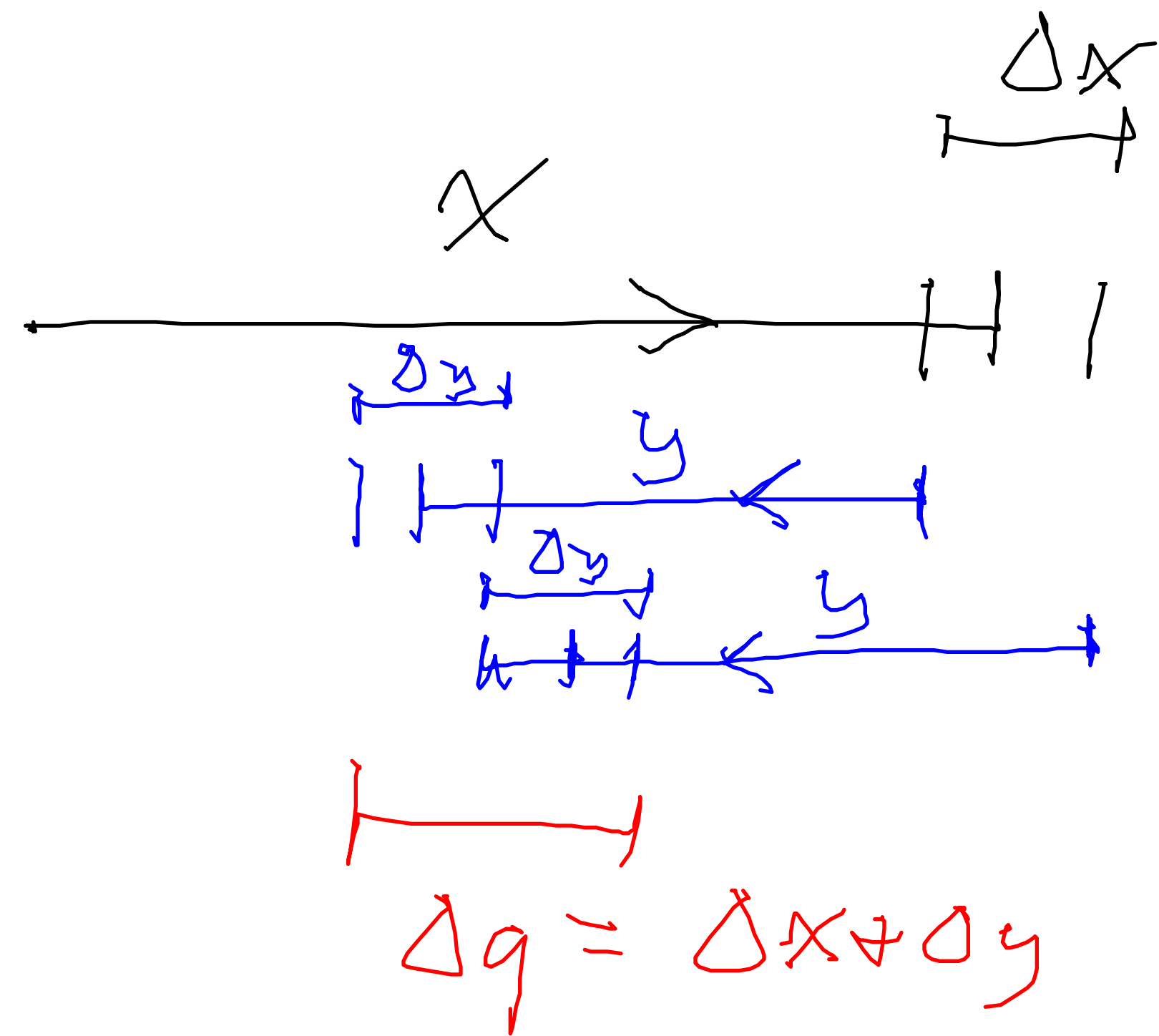
$$P_{min} = (x - \Delta x) + (y - \Delta y)$$
$$= x + y - (\Delta x + \Delta y)$$



$x \pm \Delta x$  percorso in avanti

$y \pm \Delta y$  percorso all'indietro

$$q = x - y \quad \Delta q = \Delta x + \Delta y$$



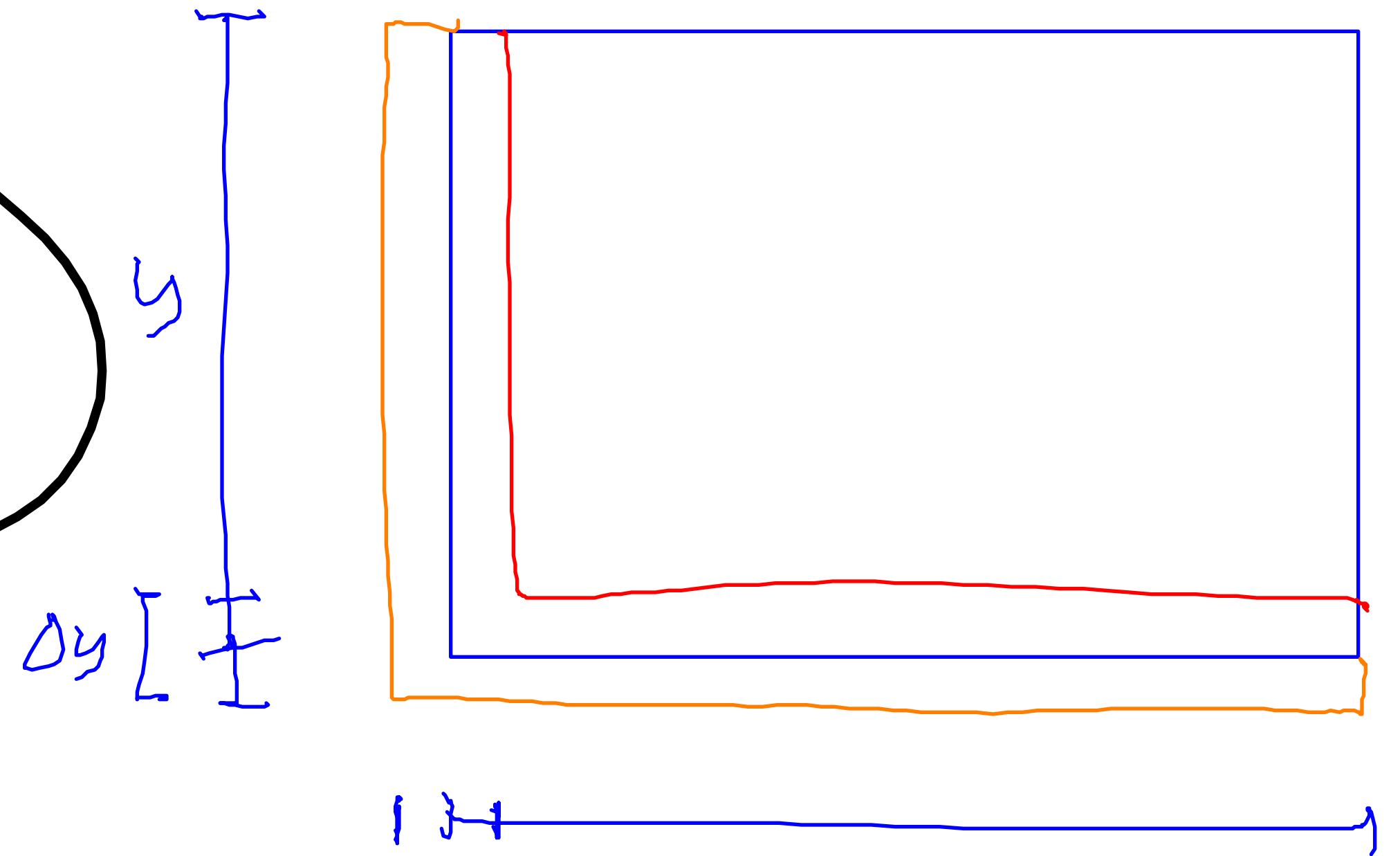


# Propagazione degli errori

ho misure  
con errori  
associati



per calcolare  
l'errore associato  
quantità derivate



$x \pm \Delta x$  base

$y \pm \Delta y$  altezza

area:  $A = x \cdot y \rightarrow A = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)$

$A_{max} = (x + \Delta x)(y + \Delta y) = x \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) y \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)$

$= xy \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x \Delta y}{xy}\right)$   
 $= xy \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right)$

*trascurabile, più piccole degli altri*

$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta A}{A}$

$xy \left(1 \pm \frac{\Delta A}{A}\right) = A \pm \Delta A$

PRODOTTI O DIVISIONI

→ somma errori relativi

# Propagazione degli errori

$$x \pm \Delta x$$

$$q = x^2 = x \cdot x$$

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{x} = 2 \frac{\Delta x}{x}$$

esponente

$$R = x^3$$

$$\frac{\Delta R}{R} = 3 \frac{\Delta x}{x}$$

$$t = x^2 y^3$$

$$\frac{\Delta t}{t} = 2 \frac{\Delta x}{x} + 3 \frac{\Delta y}{y}$$

# Propagazione degli errori

$$x_0 \pm \Delta x$$

FUNZIONE  $y = f(x)$

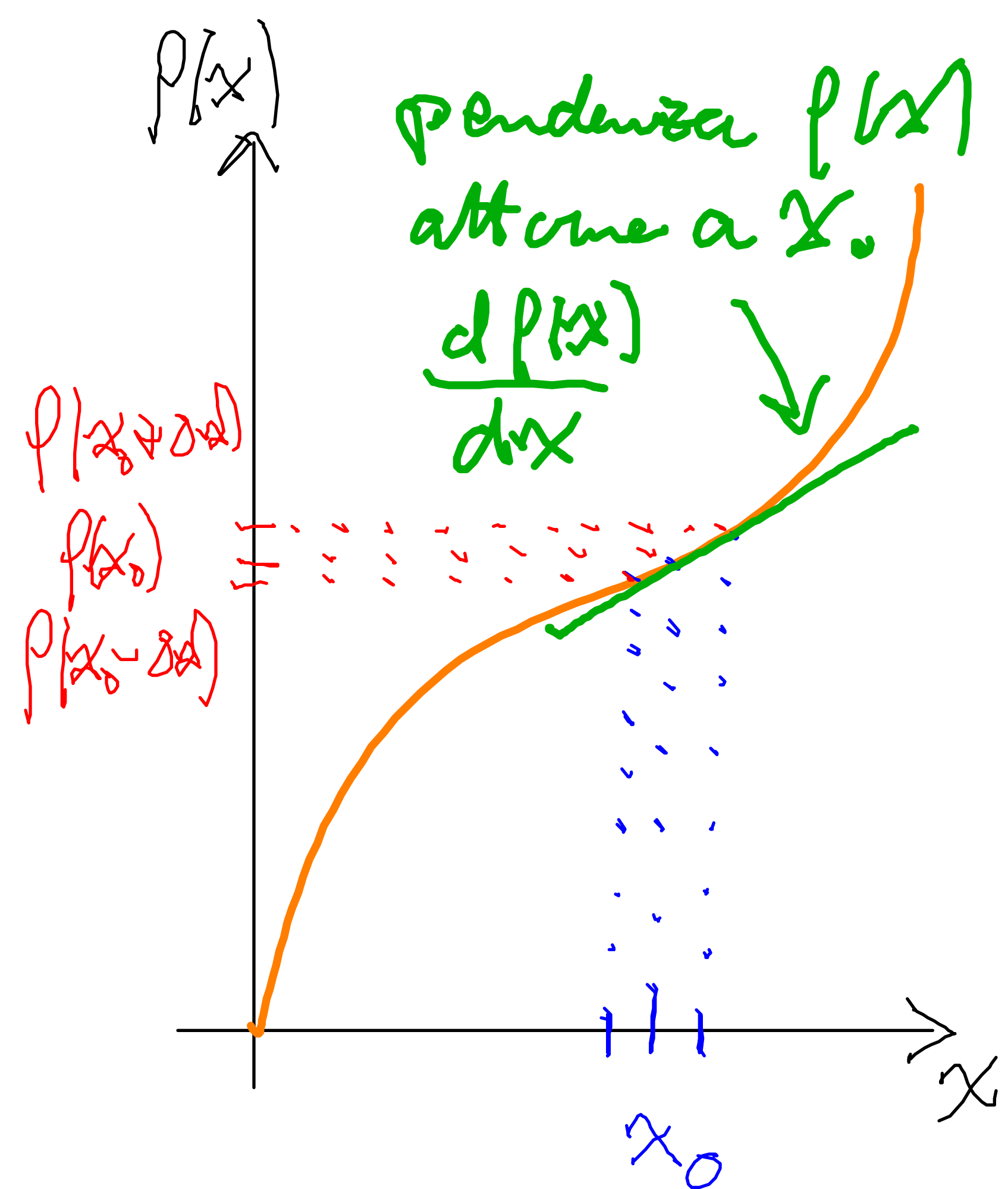
$$\Delta f(x) \approx$$

se  $\Delta x$  è piccolo rispetto ad  $x_0$

$$\rightarrow \text{se } \frac{\Delta x}{x_0} \ll 1$$

$$\rightarrow \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0}$$

$$\rightarrow \Delta f(x) \approx \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$



# Propagazione degli errori

↙ ~ 9%

↘ ~ 2%

$$\vartheta = 20^\circ \pm 3^\circ \Rightarrow 0.35 \pm 0.03 \text{ rad}$$

$$0.94 \pm 0.02$$

$$f(\vartheta) = \cos \vartheta = 0.94 \quad \text{rad}$$

$$\begin{aligned} \delta(\cos \vartheta) &= \frac{d \cos \vartheta}{d \vartheta} \cdot \delta \vartheta = (-\sin \vartheta) \delta \vartheta \\ &= (-0.34) 0.05 = -0.02 \end{aligned}$$

formula errore

$$\Delta f(x) = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$

↙ valore assoluto

↖ il segno non ha  
senso, facendo  
sempre  $\pm$