cap. 14 Oscillazioni

moti oscillatori e moti periodici

tantissimi esempi

e applicazioni!

Cinematica del moto armonico

Def. sistema con 1 grado di libertà descrivibile con 1 coordinata (ad esempio x) che varia nel tempo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = \underset{\uparrow}{A} \cos\underbrace{(\omega t + \phi)}_{\text{fase}}$$

Ampiezza

$$-A \leq x(t) \leq +A$$

ϕ costante di fase
fase iniziale a $t = 0$

ω "pulsazione"
o "frequenza angolare"

Nota 1: Angoli radianti

Nota 2: andava ok $A \operatorname{sen}(\ldots)$

$\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

moto armonico (come moti oscillatori)

si ripete dopo Δt "T" periodo

ciclo completo $\longrightarrow$ la fase aumenta 2π

$$\forall t \quad \left[\omega(t+T)+\phi\right] = \left[\omega t+\phi\right]+2\pi$$

$$\omega T = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si può definire

la "frequenza" ν

il ritmo delle oscillazioni

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

numero di cicli per unità di tempo

Nel SI

ν ω $\longrightarrow [\text{TEMPO}]^{-1}$

ω $\quad \frac{rad}{s} \quad rad \cdot s^{-1}$

ν $\quad s^{-1} \quad Hz \quad$ hertz

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$x(t)$	oscilla	$\pm A$	con	freq.	ν
$v_x(t)$	"	$\pm \omega A$	"	"	"
$a_x(t)$	"	$\pm \omega^2 A$	"	"	"

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t)$$

x & a_x: versi opposti, moduli prop.

nomenclatura

"oscillatore armonico"

ϕ - A sono determinabili condizioni al contorno, ad es. " iniziali cond. iniziali $\quad t=0$

$$x_0 = x(t=0) = A\cos\phi$$

$$v_{x0} = v_x(t=0) = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\phi$$

dividendole elimino A

$$\frac{v_{x0}}{x_0} = -\omega\,\mathrm{tg}\,\phi$$

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{-v_{x0}}{\omega x_0}\right)$$

elevandole al quadrato $\quad \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$

eliminiamo ϕ e ricavo A

$$\left(\frac{v_{x0}}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{A}\right)^2 = 1$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}}$$

$\longrightarrow$ caso particolare

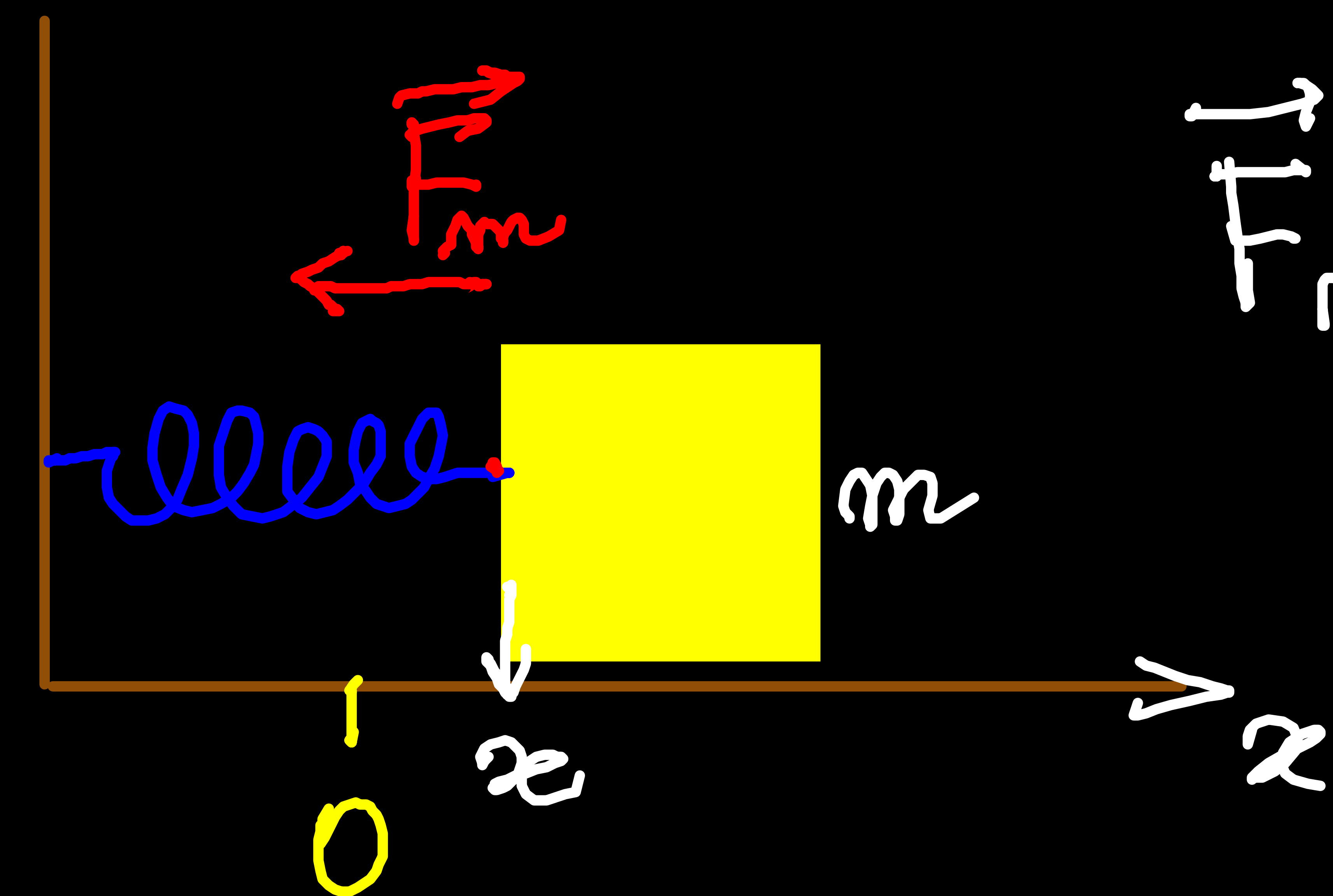
parte da fermo $v_{x0} = 0$

x_0

$\phi = tg^{-1}(0) = 0$

$A = |x_0|$

Dinamica



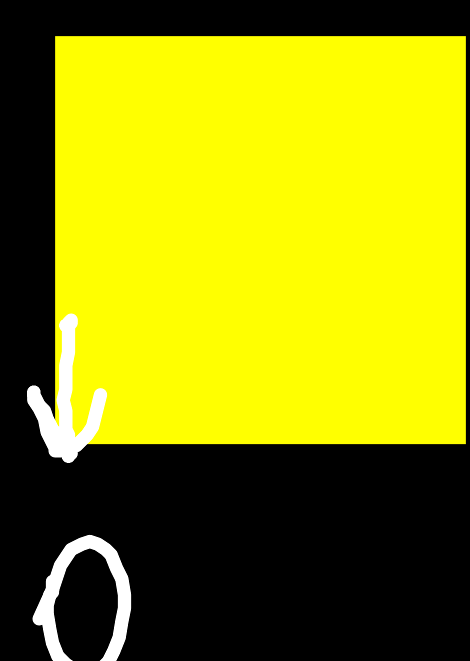
$$\vec{F}_m = -(Kx)\,\hat{i}$$

Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

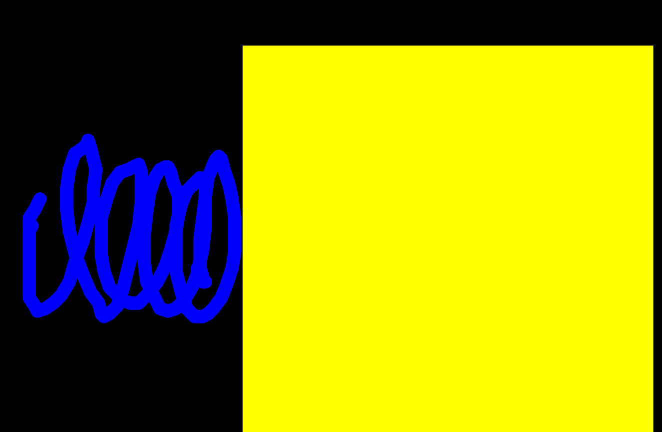
la proietto x

$$-Kx = m a_x$$



molla a riposo

$$\vec{F}_m = 0$$



$x < 0$

$\longrightarrow \vec{F}_m$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$$

eq. diff. per $x(t)$

con soluzione $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$$-\omega^2 \cancel{A} \cancel{\cos(\omega t+\phi)} = -\frac{K}{m} \cancel{A} \cancel{\cos(\omega t+\phi)}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Energia dell'oscillatore armonico

la forza elastica è conservativa

$$U = \frac{1}{2} K x^2 \qquad U(x) \qquad x(t)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

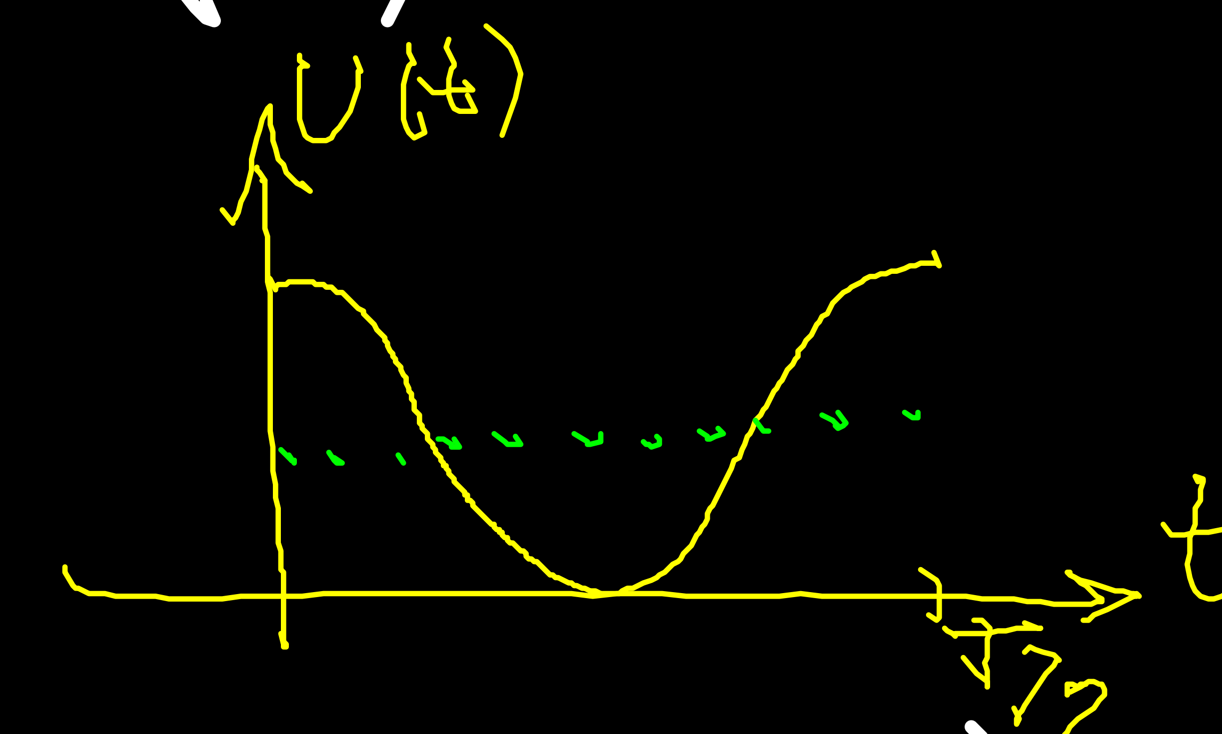
Analogamente $K = \frac{1}{2} m v_x^2 \qquad v_x(t) \qquad K(t)$

$$K(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

Energia dell'oscillatore armonico

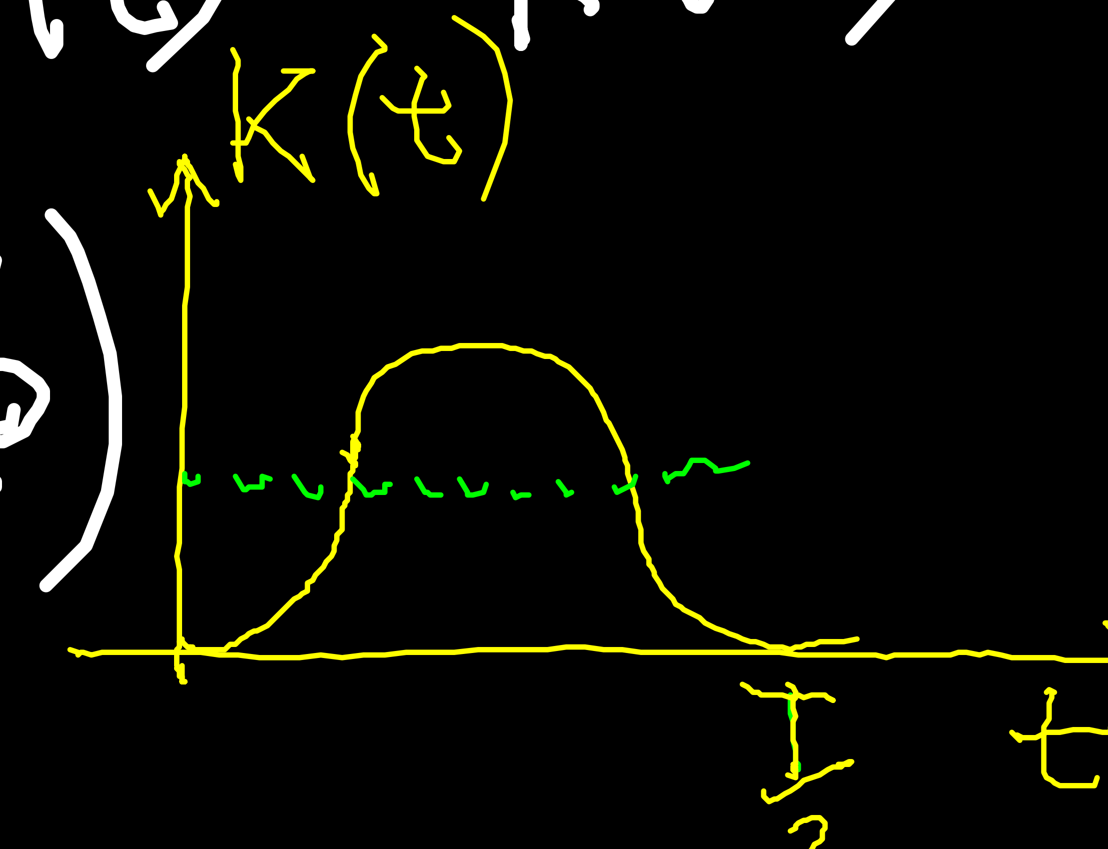
la forza elastica è conservativa

$U = \frac{1}{2} K x^2$ $\quad U(x) \quad x(t)$



$$U(t) = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Analogamente $K = \frac{1}{2} m v_x^2$ $\quad v_x(t) \quad K(t)$



$$K(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \,\mathrm{sen}^2(\omega t + \phi)$$

$$U = U_{max} \cos^2(\omega t + \phi) \qquad U_{max} = \frac{1}{2} K A^2$$

$$K = K_{max} \, sen^2(\omega t + \phi) \qquad K_{max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \qquad U_{max} = K_{max}$$

$$E = K + U = K_{max} \, sen^2(\omega t + \phi) + U_{max} \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\overset{!}{=} K_{max} \left[\underbrace{sen^2(\ ) + \cos^2(\ )}_{1} \right]$$

$$E = K_{max} = U_{max} = cost$$

Esempi di moti armonici
moltissimi in natura!

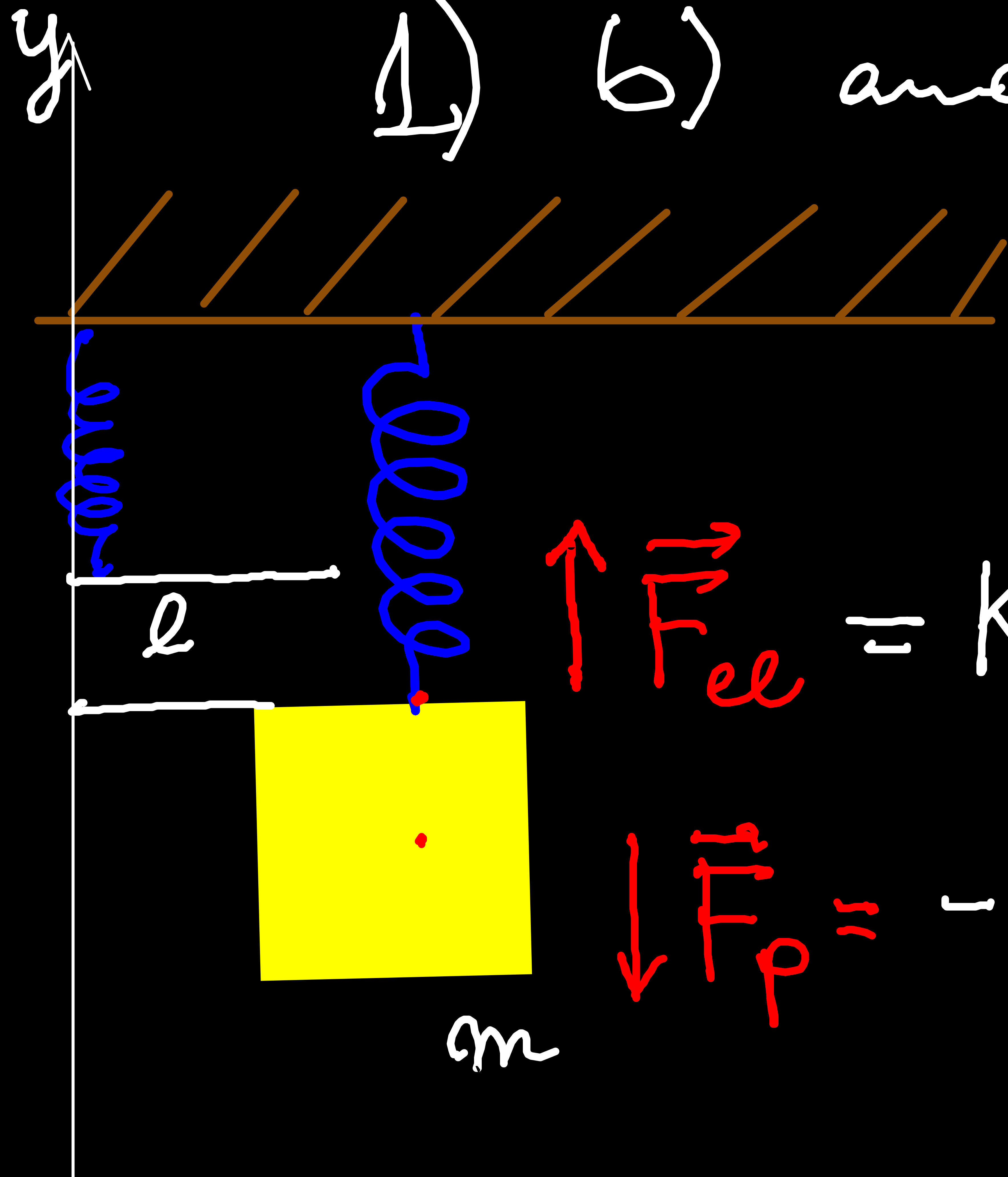
1) Forza elastica

a) molla + corpo orizz
b) " " verticale

2) Pendoli
"piccole" oscillazioni

a) pendolo semplice
b) " composto o fisico
c) " di torsione
d) " conico *
e) " Foucault

1) b) anche detto pendolo verticale



$$\vec{F}_{el} = K l \, \hat{j}$$

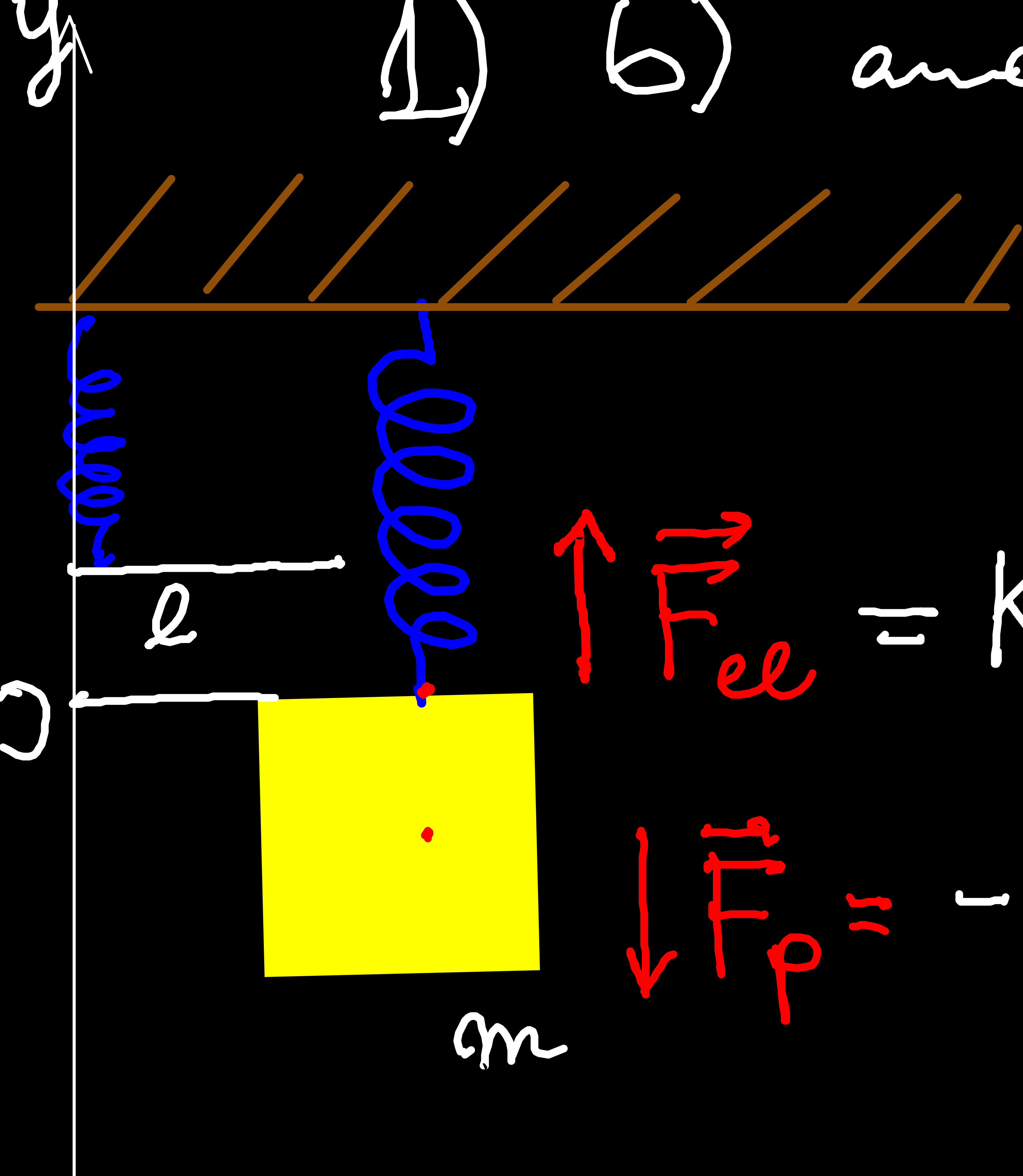
$$\vec{F}_p = -mg \, \hat{j}$$

in equilibrio statico $\quad \vec{F}_{el} + \vec{F}_p = 0$

$$K l - mg = 0$$

$$l = \frac{mg}{K}$$

1) b) anche detto pendolo verticale



$$\vec{F}_{el} = Kl\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{p} = -mg\,\hat{j}$$

in equilibrio statico $\vec{F}_{el} + \vec{F}_{p} = 0$

$$Kl - mg = 0$$

$$l = \frac{mg}{K}$$

$\Rightarrow$ metto origine di y nella nuova pos. di eq.

$$\vec{F}_{el} = K(l - y)\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{p} = -mg\,\hat{j}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

proietto in y

$$K(y - l) - mg = m a_y$$