Cap. 13 Dinamica della rotazione di corpi rigidi

13.2 e 13.3 già visto

e approfondito

Eq. cardinali della dinamica

$$(13.10) \qquad \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$- \vec{v}_O \times \vec{P}$$

Dinamica della rotazione di un corpo rigido attorno asse fisso

Caso particolare, ma grande interesse pratico!

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{l}_{i0} = \sum \underset{\substack{\uparrow \\ \overrightarrow{OP_i}}}{\vec{r}_i} \times \vec{p}_i$$

$\vec{L}$ rispetto $O \in$ asse di rotazione

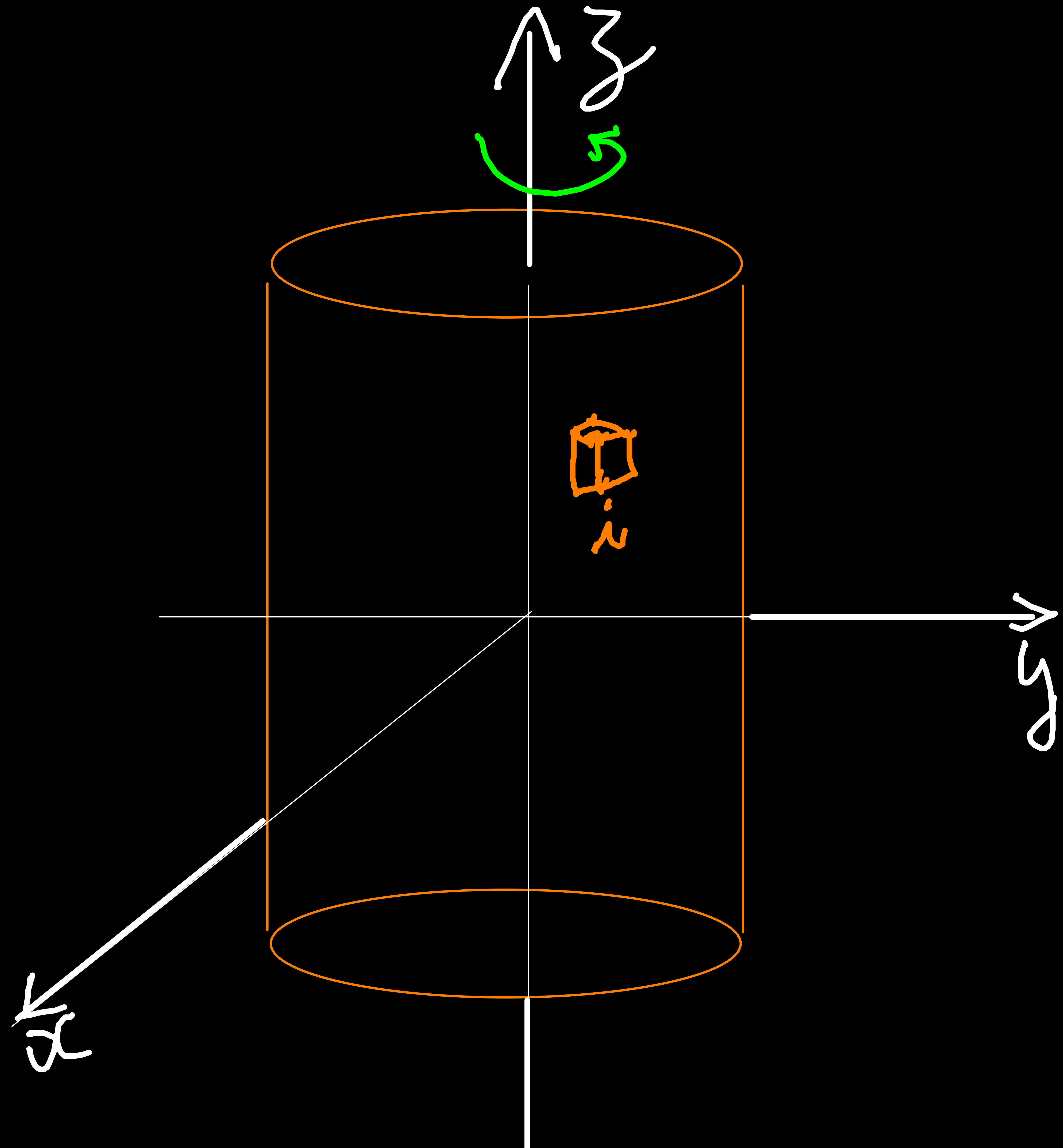
vogliamo trovarne la relazione con $\vec{\omega}$

$\vec{L}$	rispetto O polo punto	$\vec{r}$ r distanza risp O
$\vec{\omega}$	rispetto asse retta	R distanza dall'asse

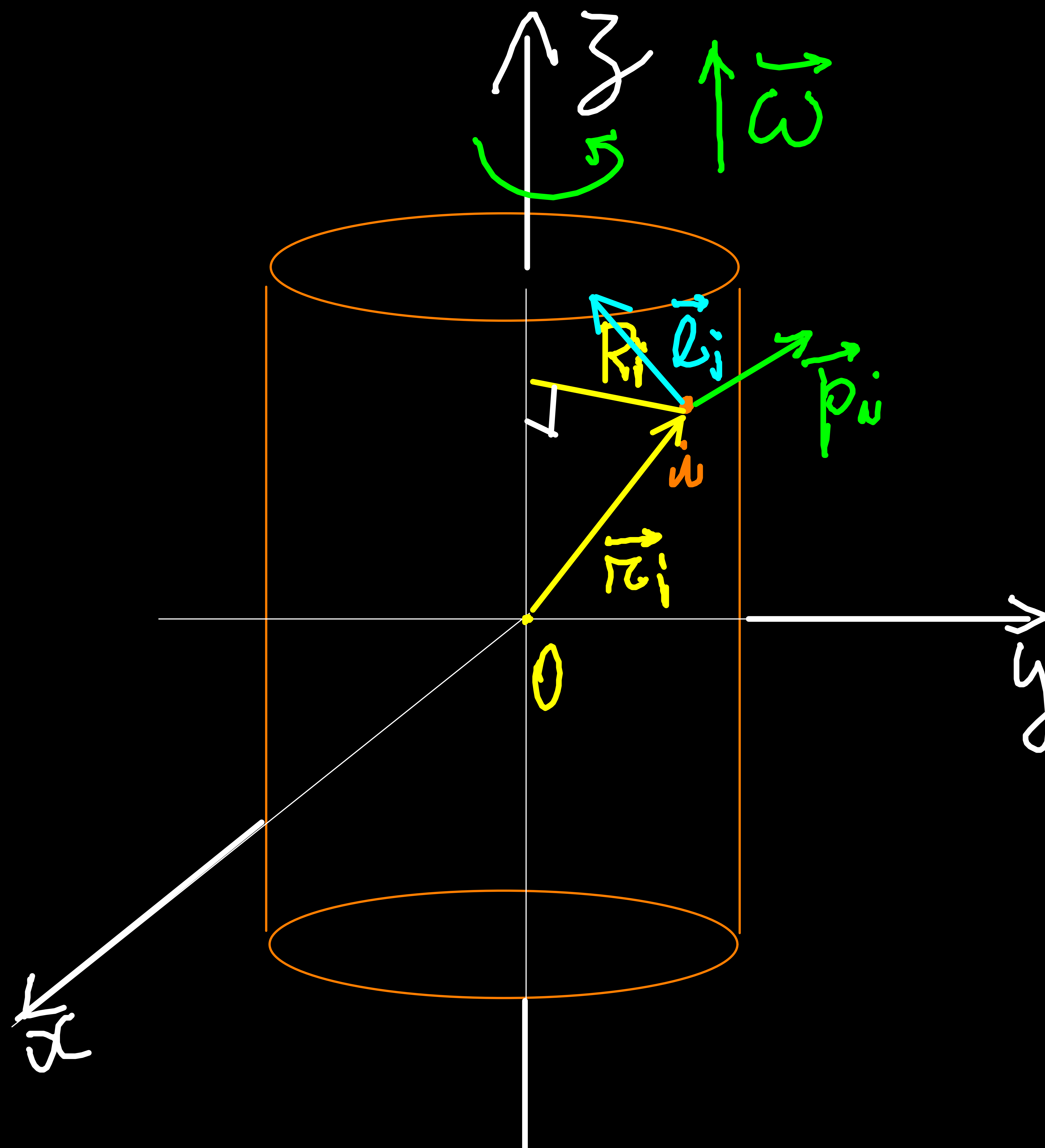
Prendo z come asse di rotazione

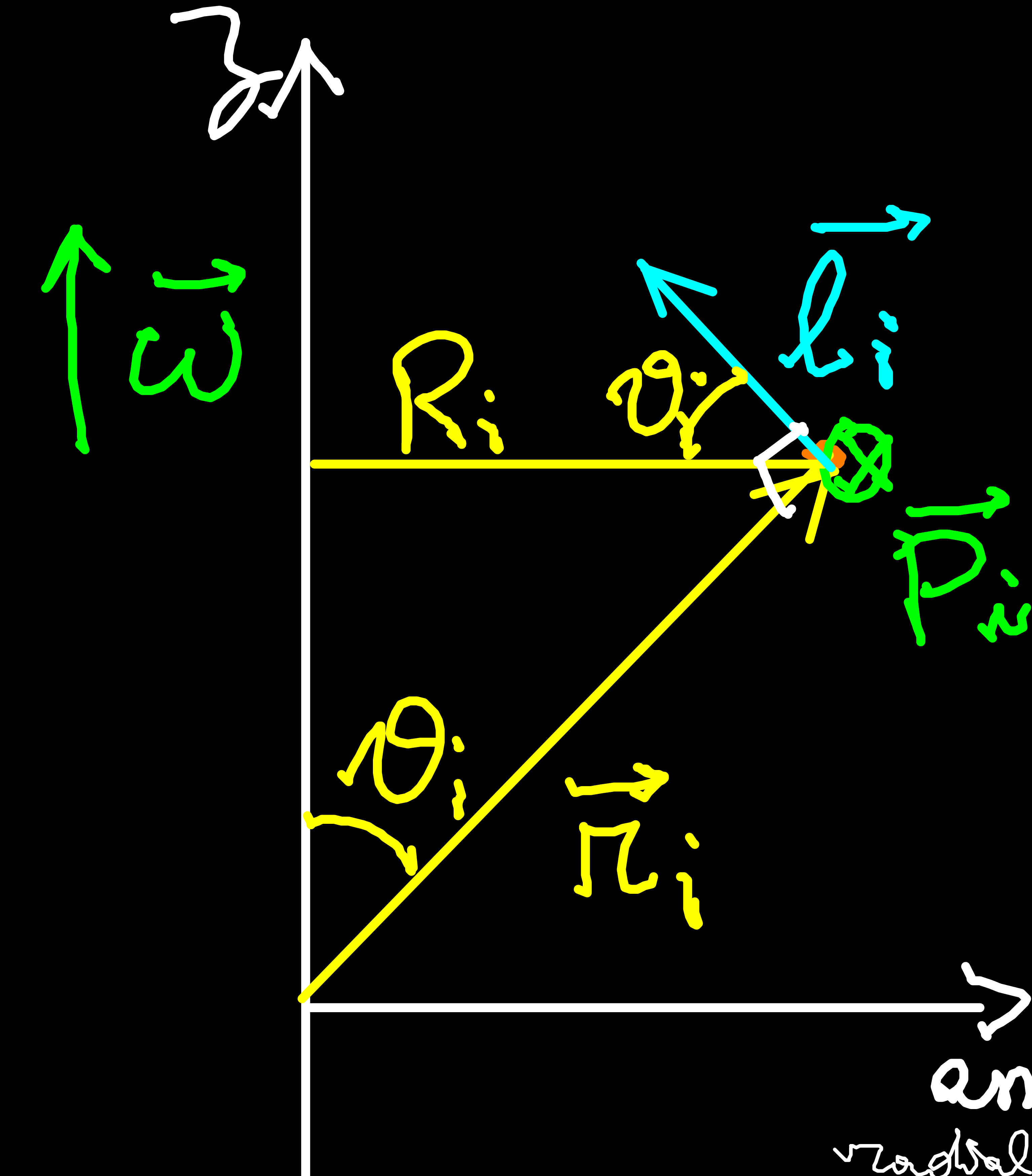
Calcolo L_z anche detta $\boxed{\text{componente assiale}}$

$$L_z = \left(\sum \vec{l}_i\right)_z = \sum l_{iz}$$

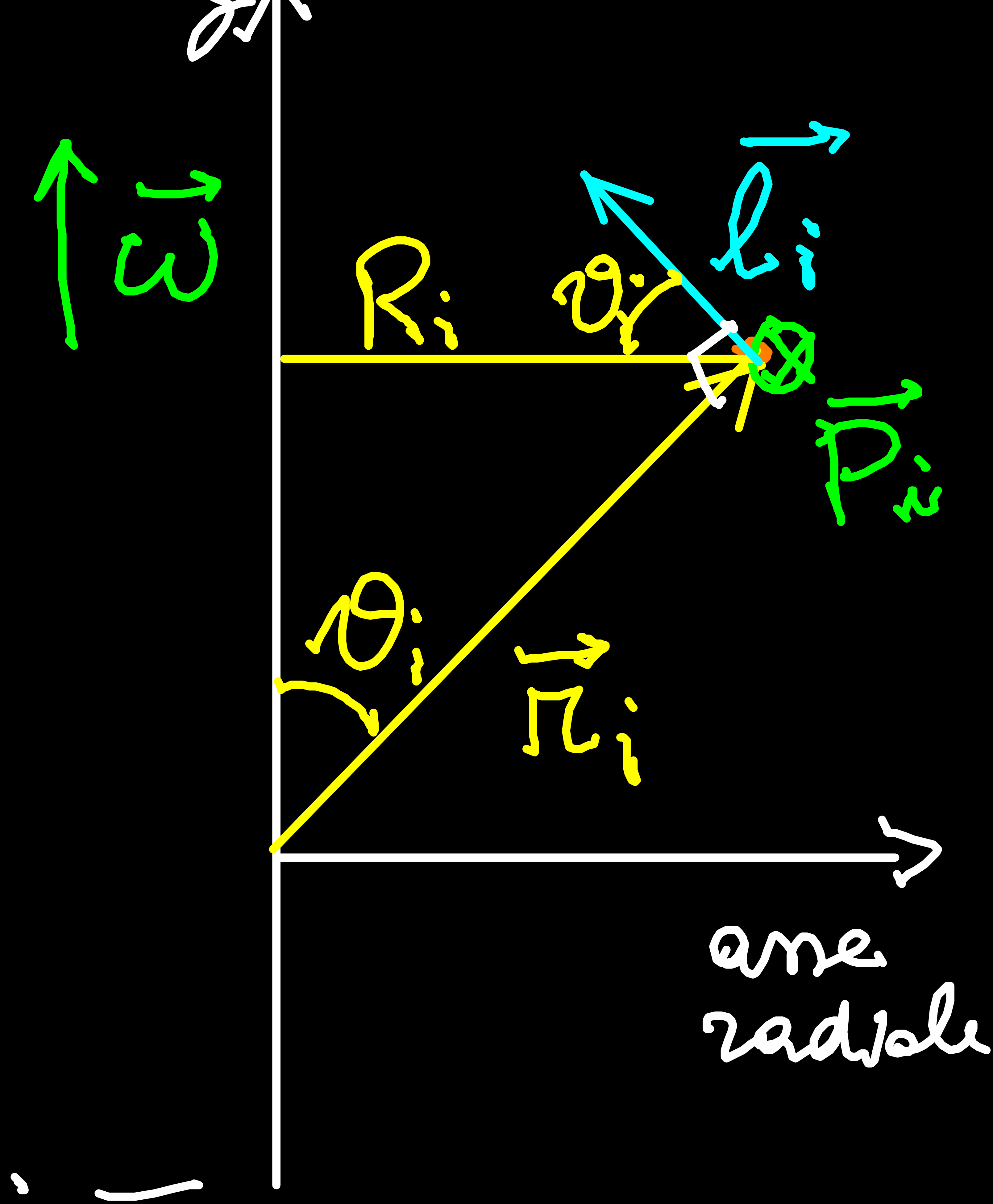


z
i
y
x





Visto nella sezione del piano $\left\{ \begin{array}{l} \text{asse } z \\ \vec{r}_i \end{array} \right.$



$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad \vec{p}_i \perp \vec{r}_i$$

$$|\vec{l}_i| = l_i = r_i p_i = r_i m_i v_i$$

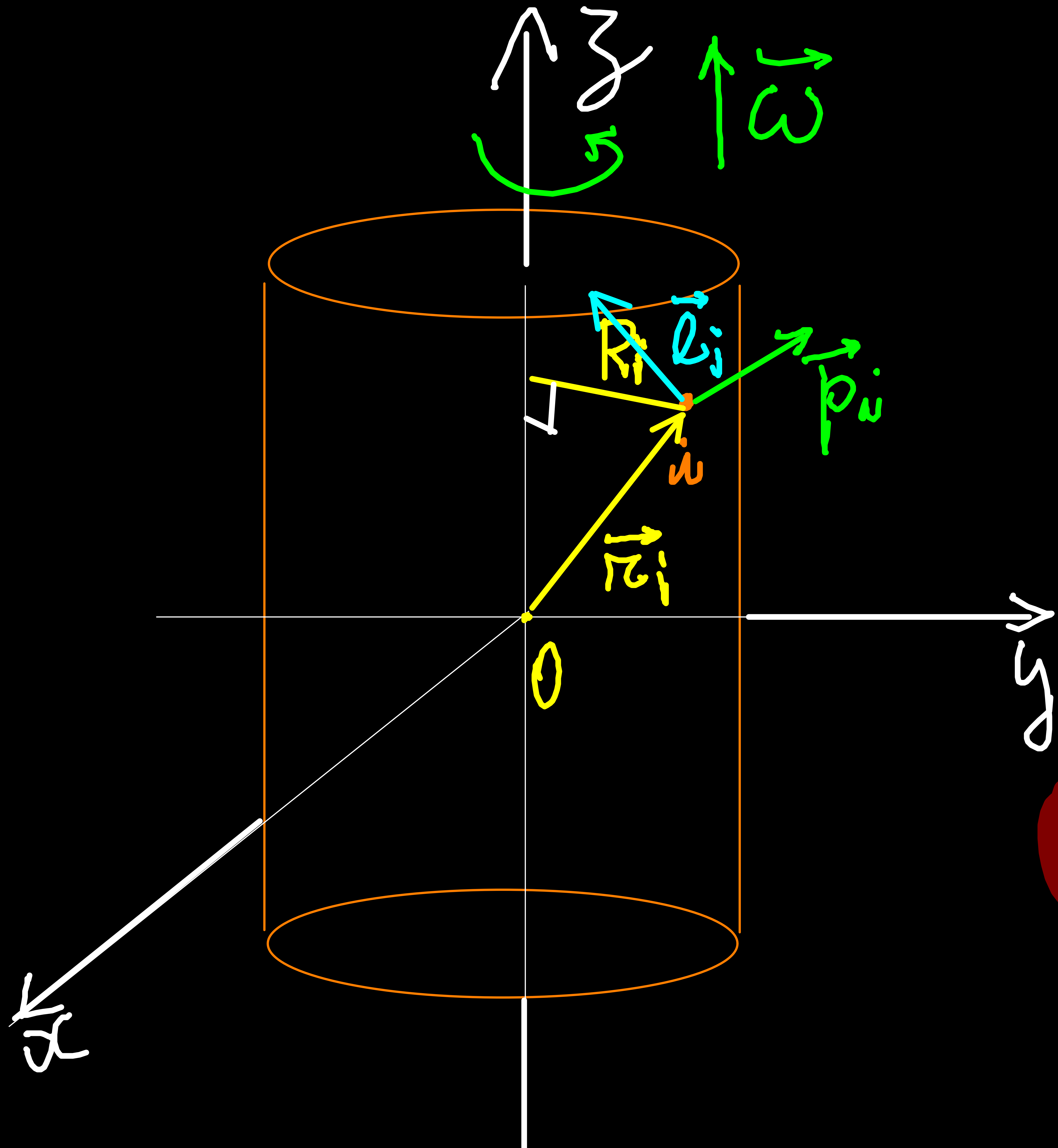
$$= r_i m_i R_i \omega_z$$

$$l_{iz} = l_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i = \underbrace{r_i \,\mathrm{sen}\,\theta_i}_{R_i} m_i R_i \omega_z$$

$$= m_i R_i^2 \omega_z$$

espressione valida qq sia origine

$$L_z = \sum l_{iz} = \Big(\underbrace{\sum m_i R_i^2}_{I_z}\Big) \omega_z$$



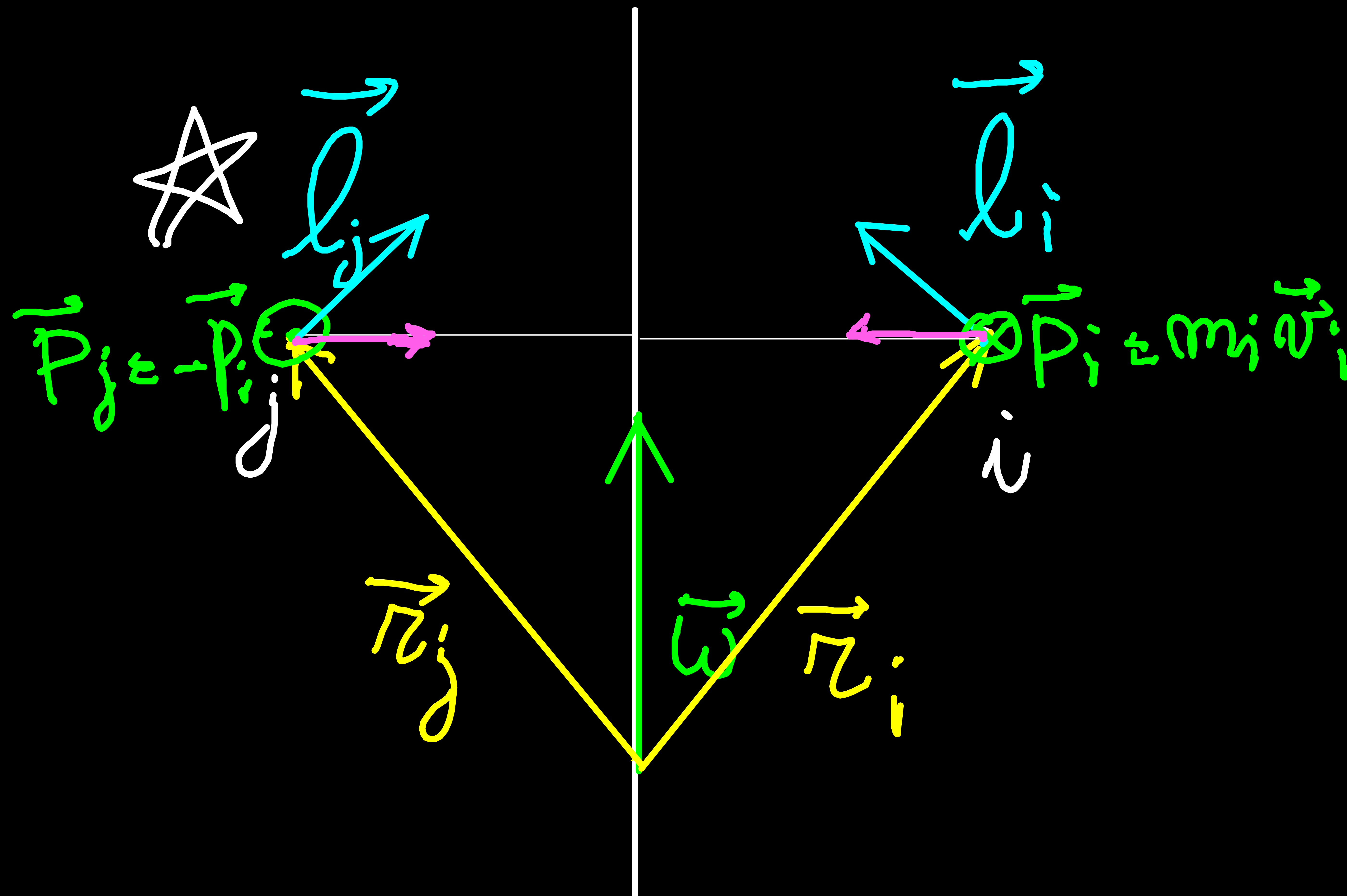
$$L_z = I_z \omega_z$$

OK per comp. assiale

Per corpi simmetrici* rispetto all'asse di rotazione

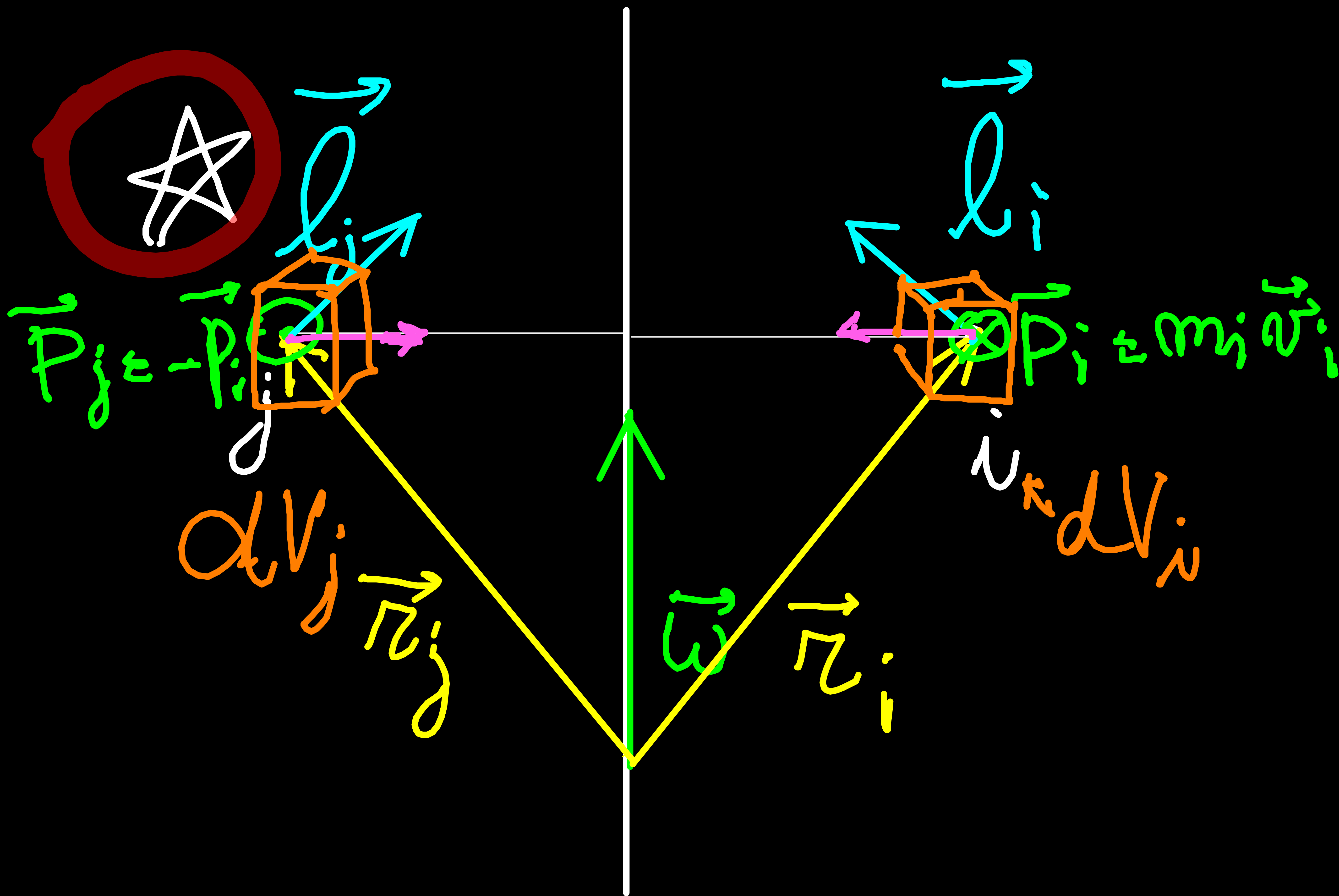
* masse e geometria

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



le componenti radiali sono opposte e quindi sommate si annullano

$$\forall i \quad (\forall dV) \quad \exists j \text{ simmetrico}$$



le componenti radiali sono opposte e quindi sommate si annullano

$\Rightarrow L_r = 0 \Rightarrow$ rimane solo L_z

$\forall i \ (\forall\, dV_i) \ \exists j$ simmetrico dV_j

$\vec{L} = I\vec{\omega}$ corpi simmetrici in rotazione attorno asse fisso

Se il corpo non è simmetrico

$\vec{L}$ ha anche componente radiale

quindi $\vec{L}$ "ruota" attorno asse.

Per esempio ruota non centrata $\rightarrow$ sforza i vincoli sull'asse!

Caso simmetrico.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{equivalente} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

x	θ
v_x	ω
a_x	α
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
m	I

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\omega_z\right) = I\frac{d\omega_z}{dt} = I\alpha_z$$

Condizione
di rigidità
del corpo
I è costante

dato che $\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow$

$$\left(\sum \vec{\tau}_{ext}\right)_z = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_z \qquad \sum \tau_{ext\,z} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\sum \tau_z = I \alpha_z$$

equazione del moto per corpo rigido vincolato a ruotare attorno asse fisso

$$\boxed{\text{cercasi } \tau_z}$$

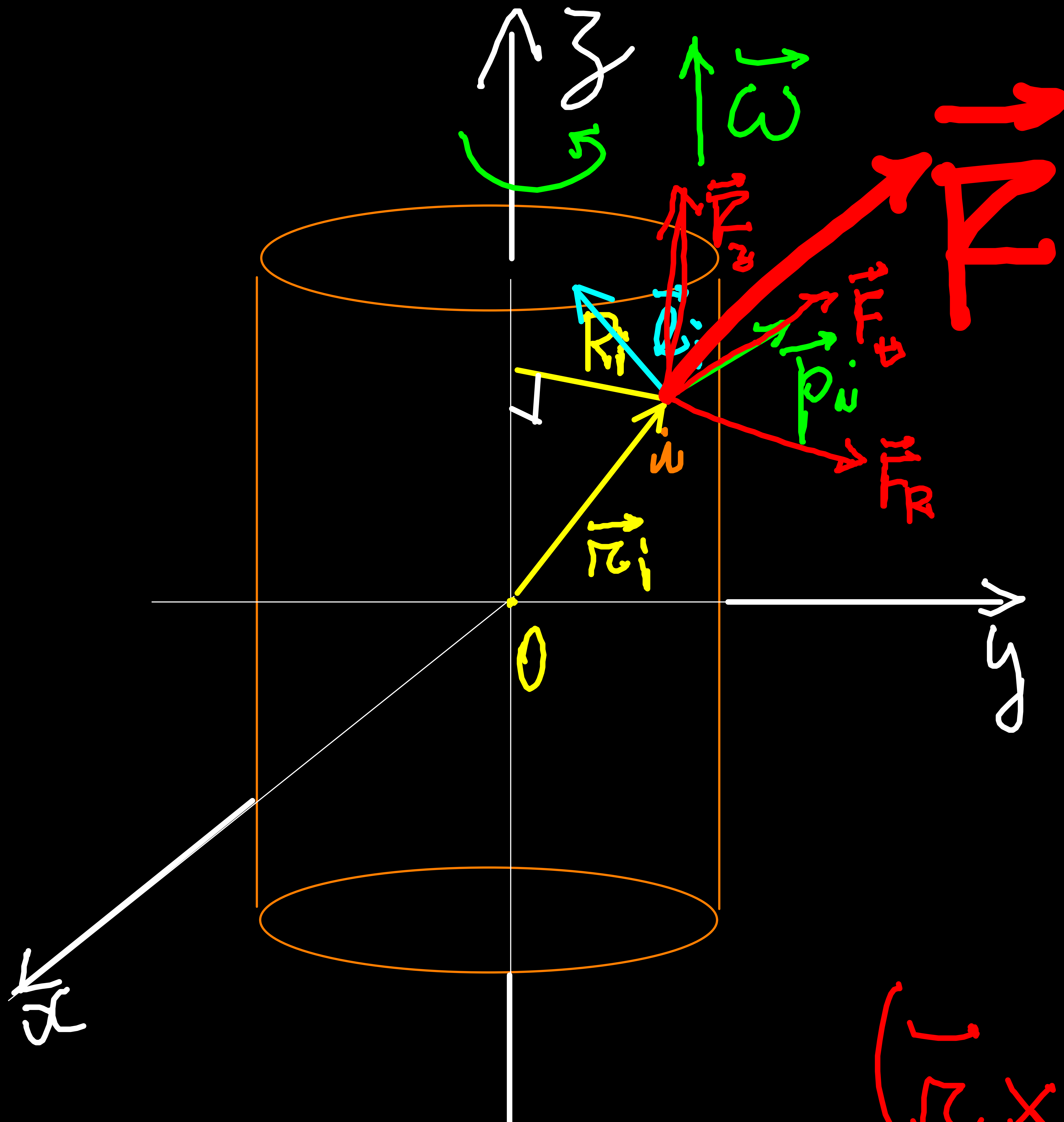
$$\tau_z = (\vec{r} \times \vec{F})_z$$

In gen. $\vec{\tau}$ ha tutte e 3 le componenti

$\vec{F}$ $\boxed{\text{asse } z\text{, radiale } R\text{, tangenziale } t}$

scomporlo in queste 3 componenti

$$\tau_z = (\vec{r} \times \vec{F})_z = \left[\vec{r} \times (\underbrace{\vec{F}_z}_{0} + \underbrace{\vec{F}_R}_{0} + \underbrace{\vec{F}_t}_{\neq 0})\right]$$



$$\left(\vec{r} \times \vec{F}_z\right)_z = 0$$

$$\left(\vec{r} \times \vec{F}_R\right)_z = 0$$

$$\left(\vec{r} \times \vec{F}_t\right)_z = R F_t$$