$$I = \sum m_i R_i^2$$

$$I = \int_V \rho R^2 \, dV$$

Esempi di I

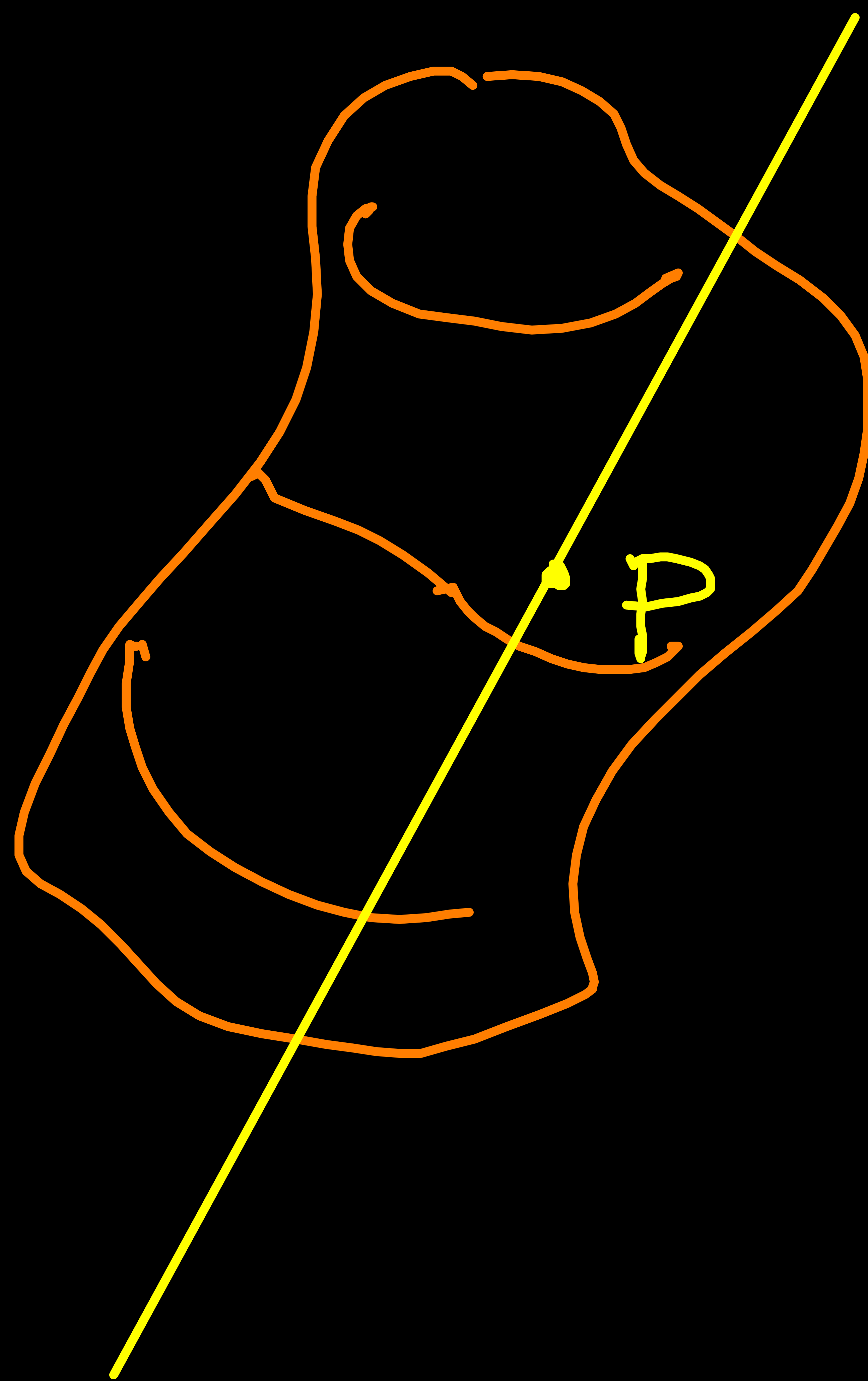
Anello e cilindro cavo omogenei $I = mR^2$

Disco e cilindro " $I = \frac{1}{2} mR^2$

Teorema assi paralleli

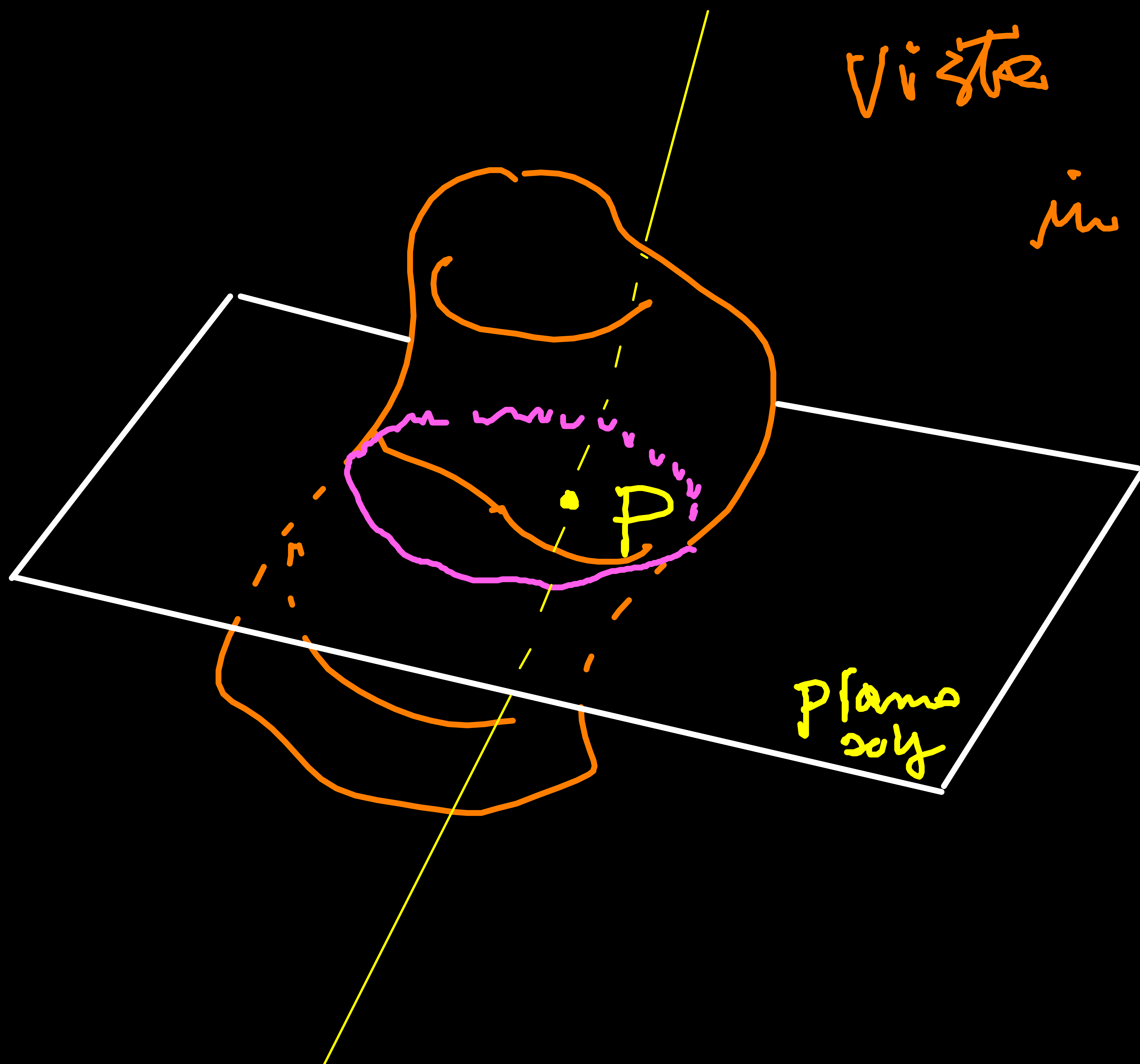
Utile se asse che mi interessa è parallelo all'asse passante dal cm, e questo è noto (vale I_{cm})

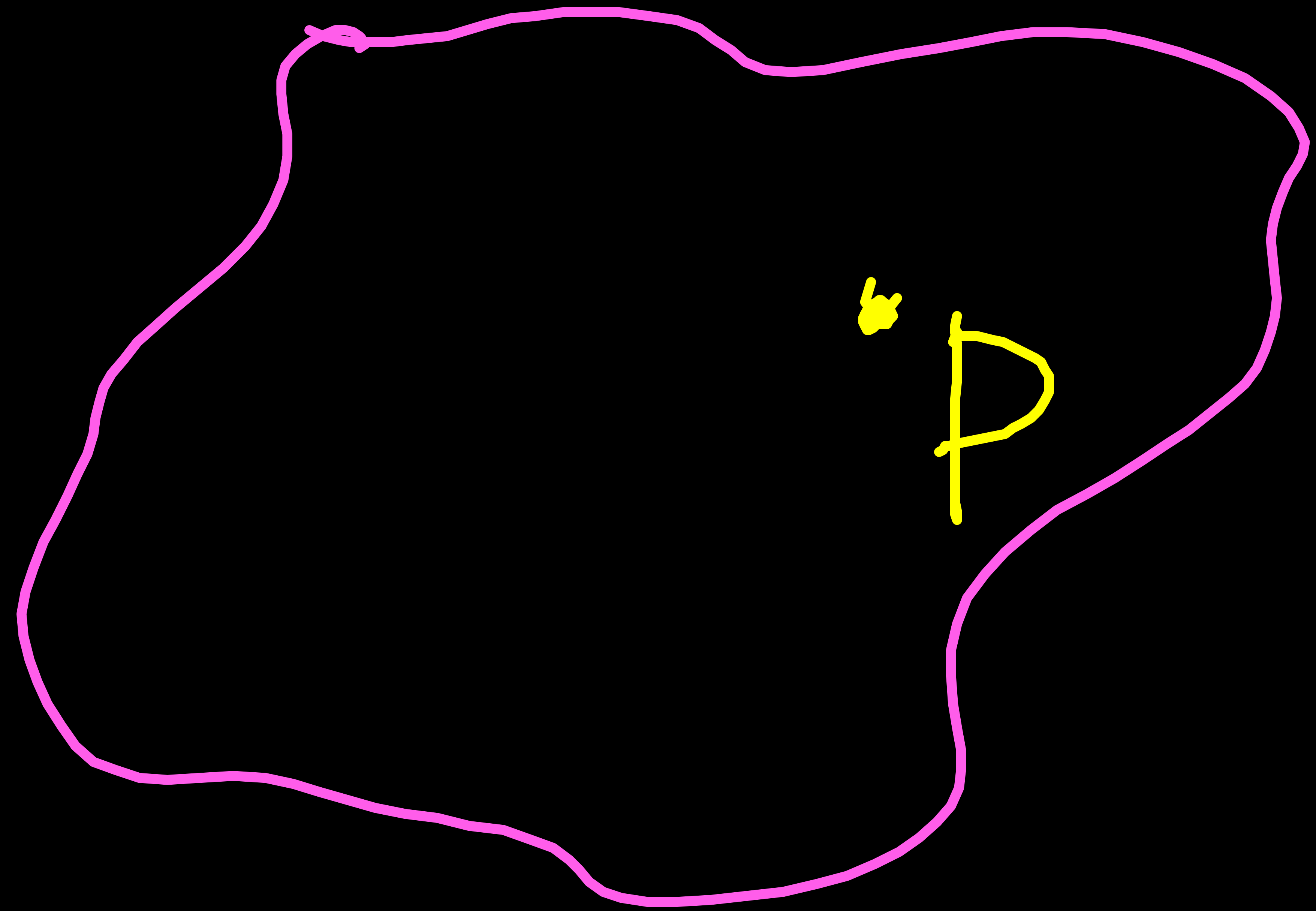
Viste 3D
in prospettiva



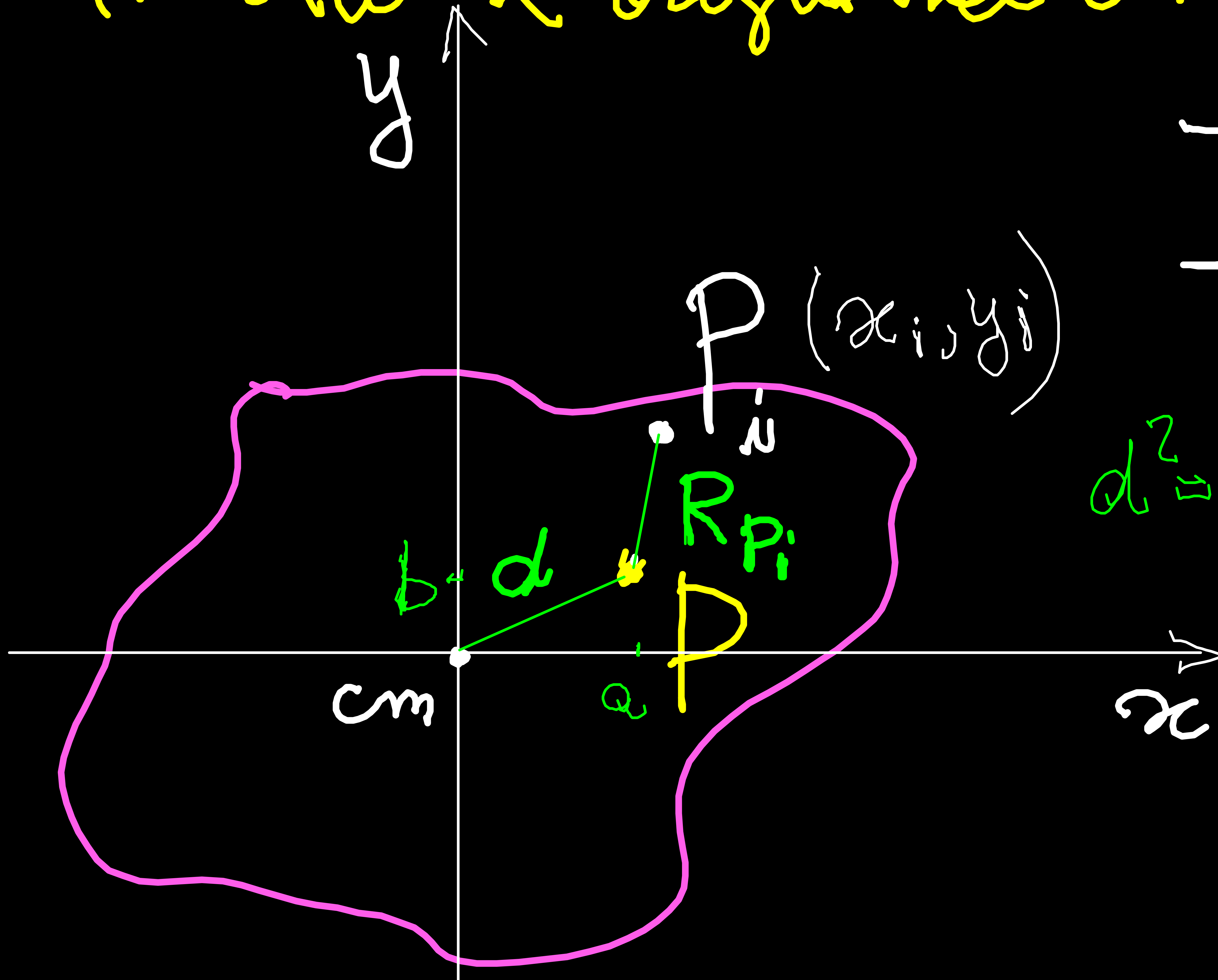
Viste 3D

in prospettiva





sezione nel piano xy perp. all'asse di rotazione metto l'origine nel cm $\Rightarrow x_{cm} = 0 \quad y_{cm} = 0$



sezione nel piano xy

$$I_P = \sum m_i R_{P_i}^2$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

R_{P_i} è ipotenusa triangolo con cateti $\begin{cases} x_i \to a \\ y_i \to b \end{cases}$

$$I_p = \sum m_i \left[R_{p_i}^2 \right] = \sum m_i \left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 \right]$$

$$= \underbrace{\sum m_i \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{\text{distanza di } P_i \text{ dal cm}^2}}_{I_{cm}} - 2a \underbrace{\sum m_i x_i}_{M x_{cm} = 0} - 2b \underbrace{\sum m_i y_i}_{M y_{cm} = 0} +$$

$$+ \underbrace{(a^2 + b^2)}_{d^2} \underbrace{\sum m_i}_{M}$$

Teorema assi paralleli

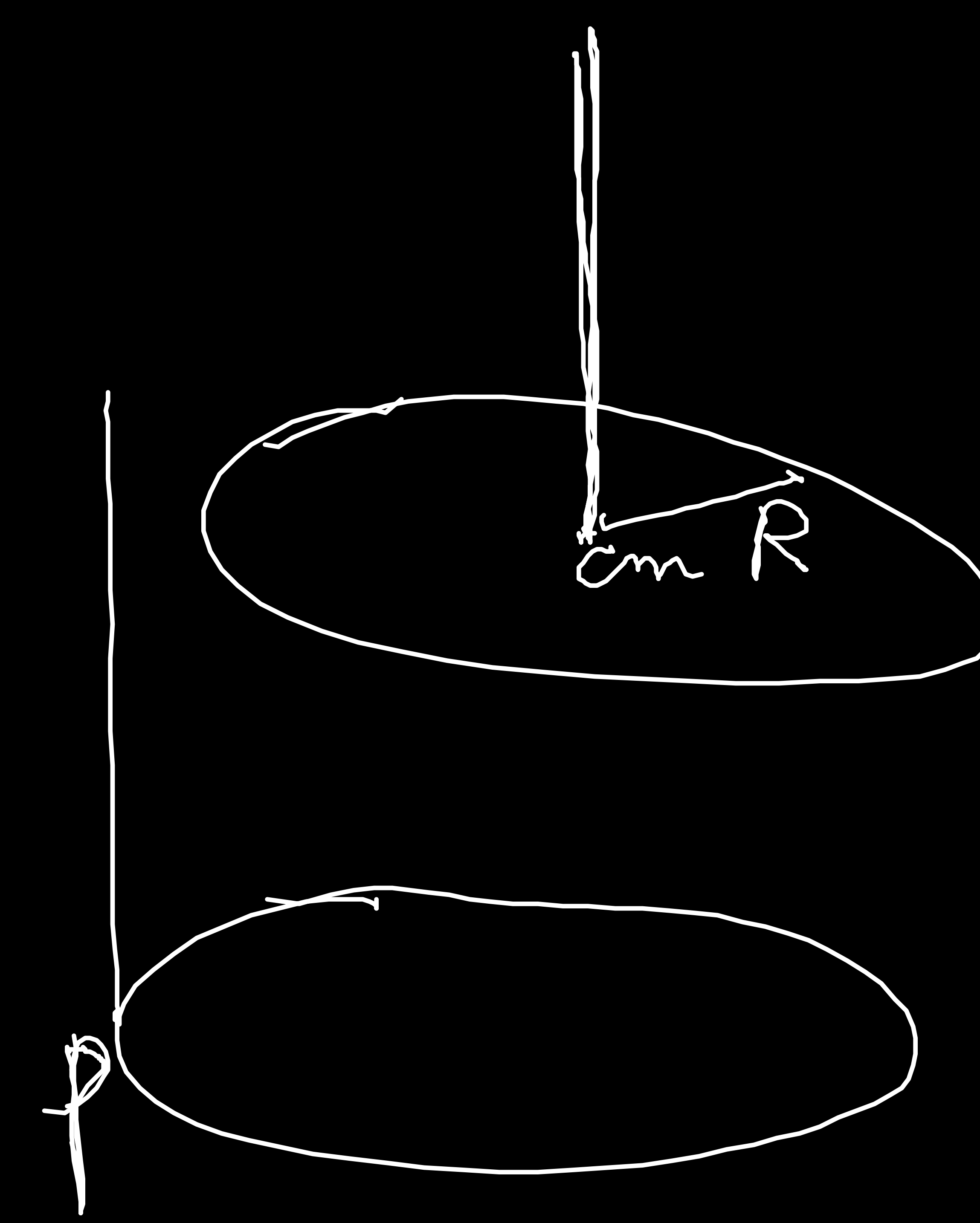
$$I_p = I_{cm} + Md^2$$

Nota: P è un punto arbitrario!

Esempi:

anello $\quad I_{cm} = MR^2$

anello, asse // estremità P $\quad I_p = 2MR^2$



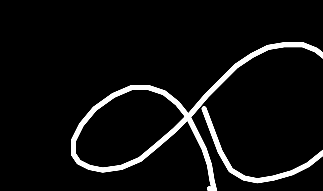
disco omog. cm $\quad I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

disco omog. estremità P $\quad I_p = \frac{3}{2}MR^2$

Rotolamento di un corpo rigido

- Puro rotolamento (senza strisciare)
- su una superficie non in moto.
- sezione del corpo circolare

Esempi:



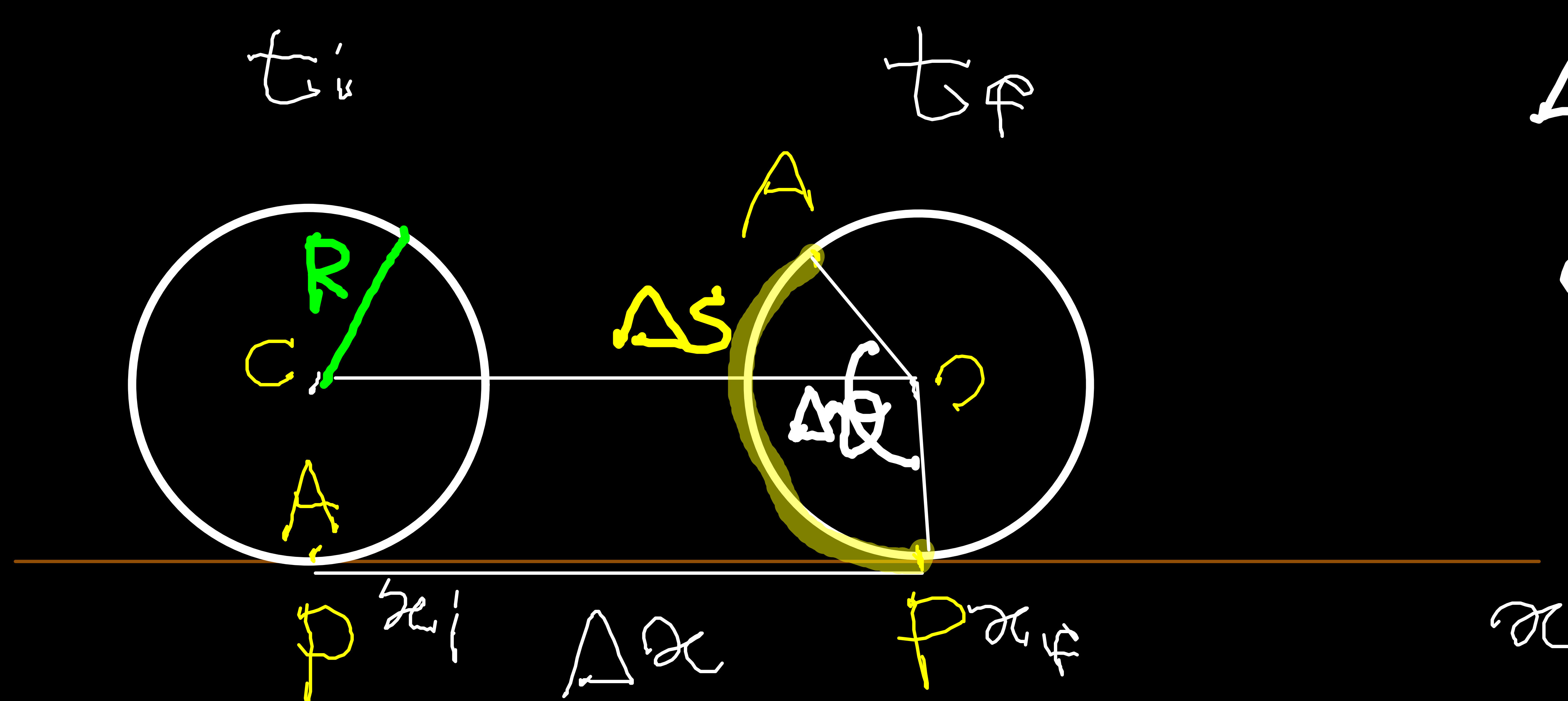
ruota

palla ecc

Osservazioni sul moto:

- asse di rotazione ha un moto traslatorio, ma mantiene orientazione costante

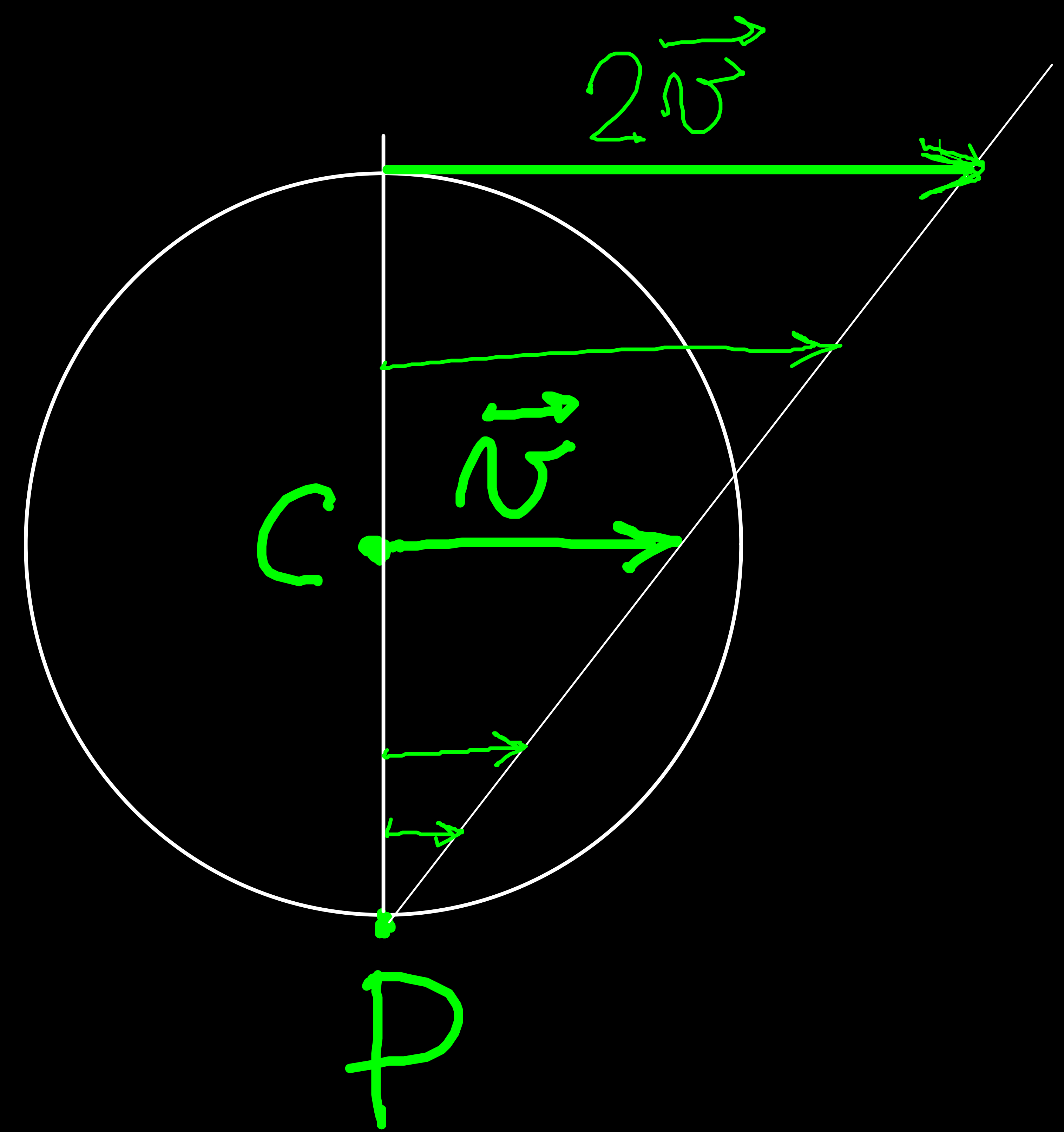
$\Longrightarrow$ relazione fissa fra v e ω



$$\underset{\text{del centro}}{\Delta x} = \underset{\text{del punto di contatto}}{\Delta S} = R\Delta\theta$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

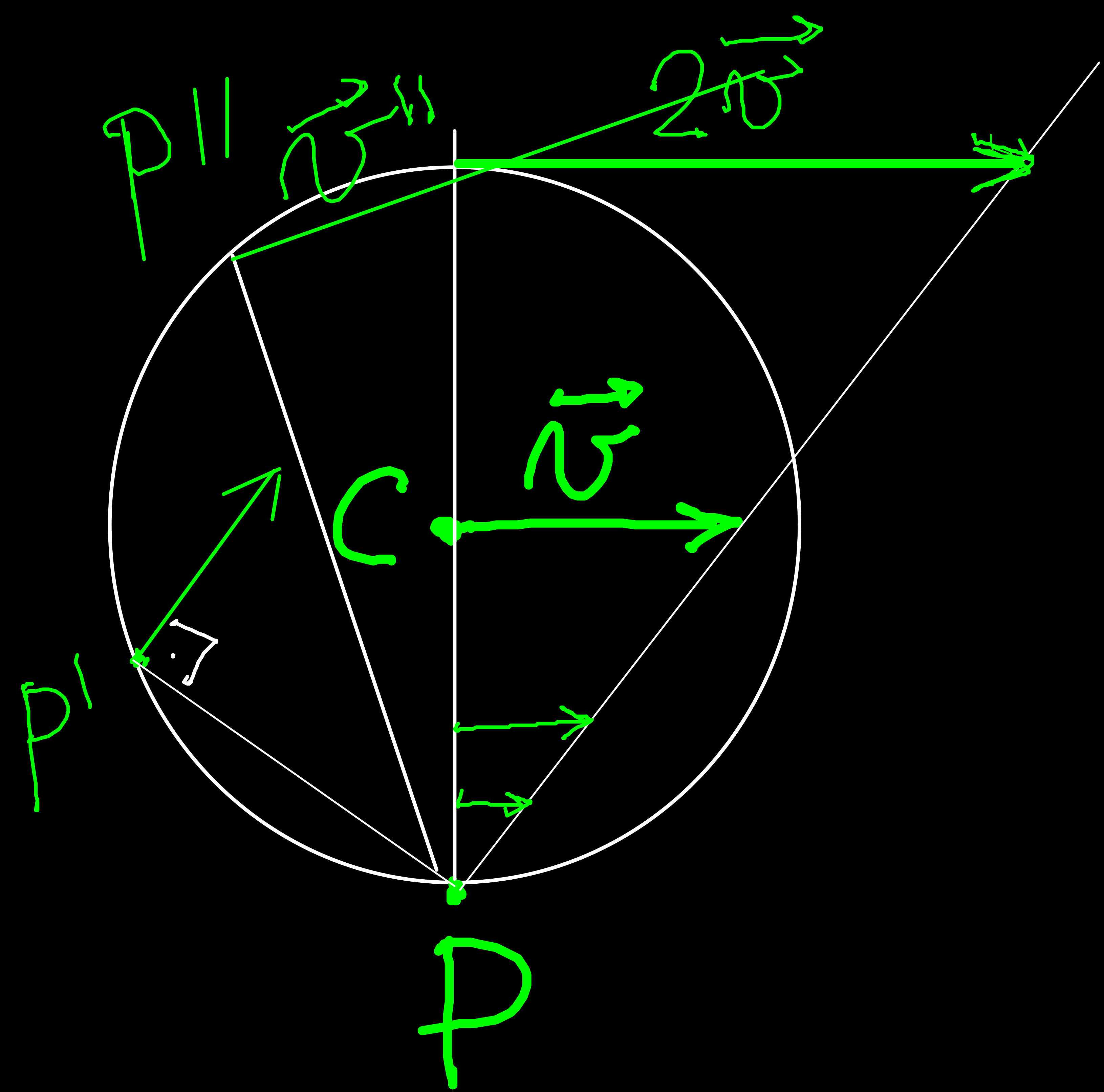
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$



$v = R\omega$

vale solo per C

Il punto di contatto istantaneo ha velocità nulla!



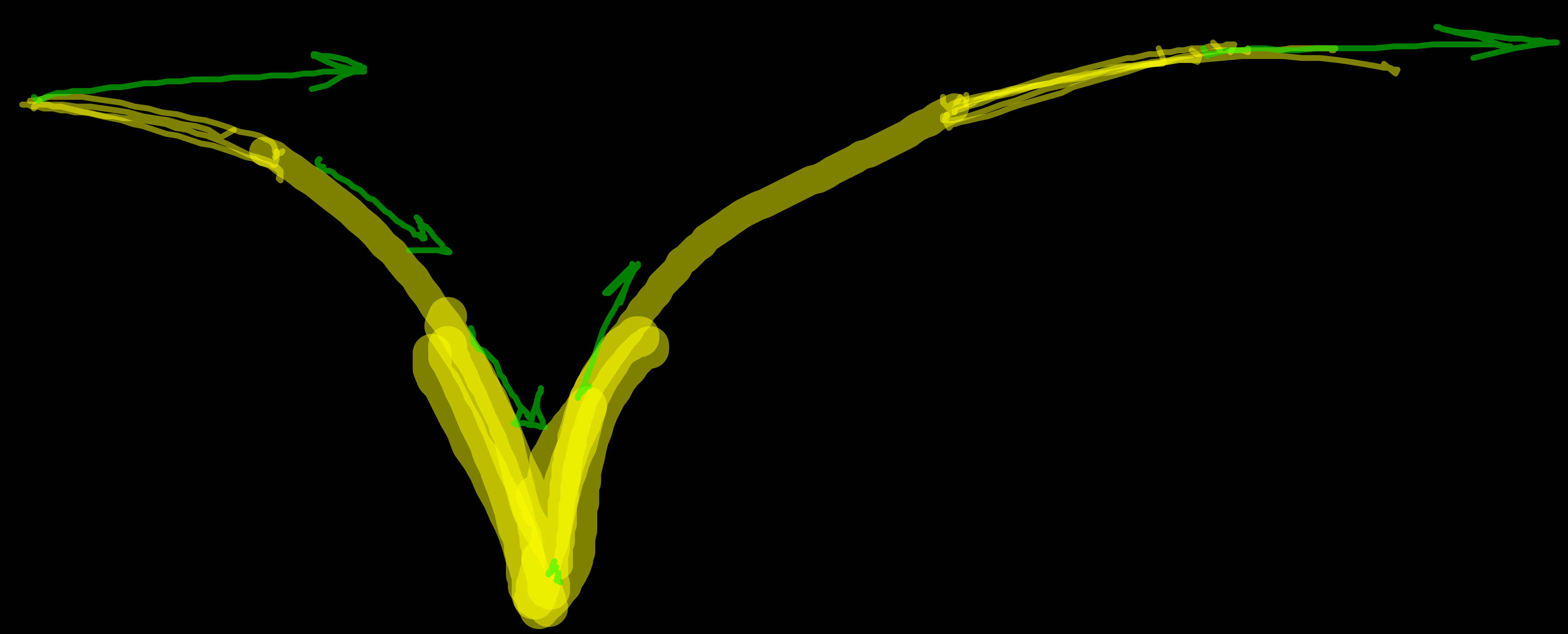
$v = R\omega$

vale solo per C

Il punto di contatto istantaneo ha velocità nulla!

ogni punto P' ha velocità $\perp$ $\overrightarrow{PP'}$
e modulo $\propto |\overrightarrow{PP'}|$

Punto luminoso all'estremità ha la traiettoria Fig. 12.19



La velocità angolare ω_P rispetto asse per P

è uguale alla " " ω_c per C

$$v_{CP} = v_{PC}$$

velocità di C rispetto P

velocità di P rispetto a C

$$v_{CP} = \omega_P R \qquad v_{PC} = \omega_c R$$

$$\omega_P \cancel{R} = \omega_c \cancel{R}$$

posso omettere gli indici ω

Per il puro rotolamento
attorno all'asse per P

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

se il corpo ha distribuzione simmetrica di massa
attorno a C $\Rightarrow$ $C \equiv cm$

$$I_P = I_c + Md^2$$

R

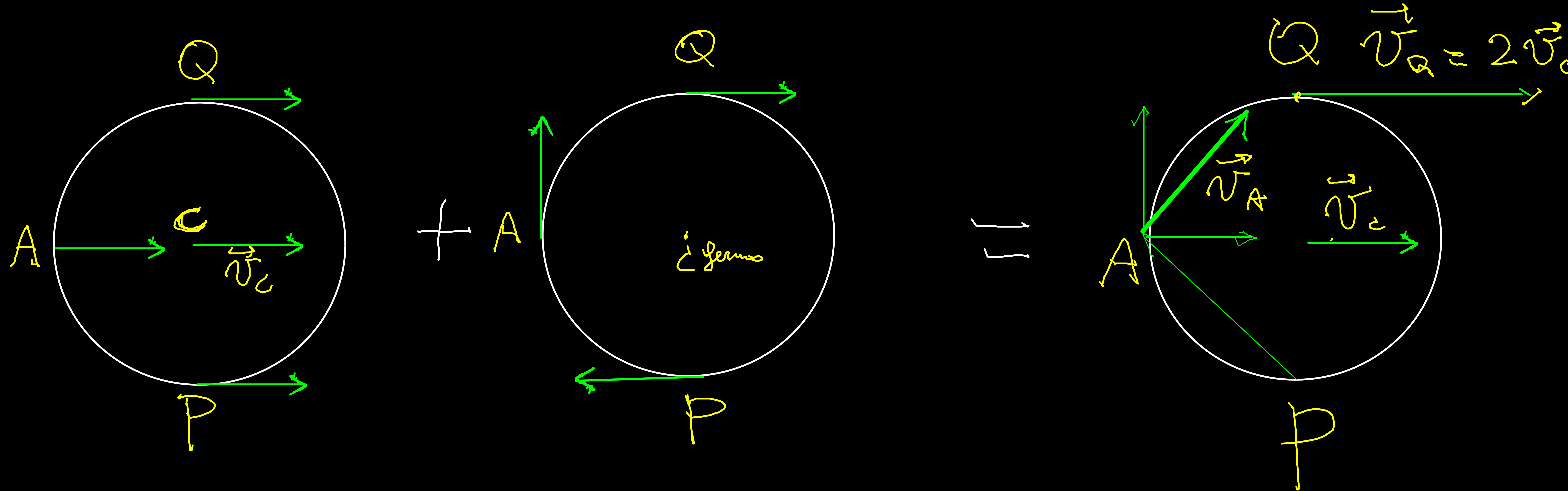
$$K = \frac{1}{2}\left(I_c + MR^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} I_c \omega^2}_{\text{rotazione attorno asse cm}} + \underbrace{\frac{1}{2} M v^2}_{\text{traslazione cm}}$$

Composizione dei moti



traslazione + rotazione C

$\vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Osservazione:

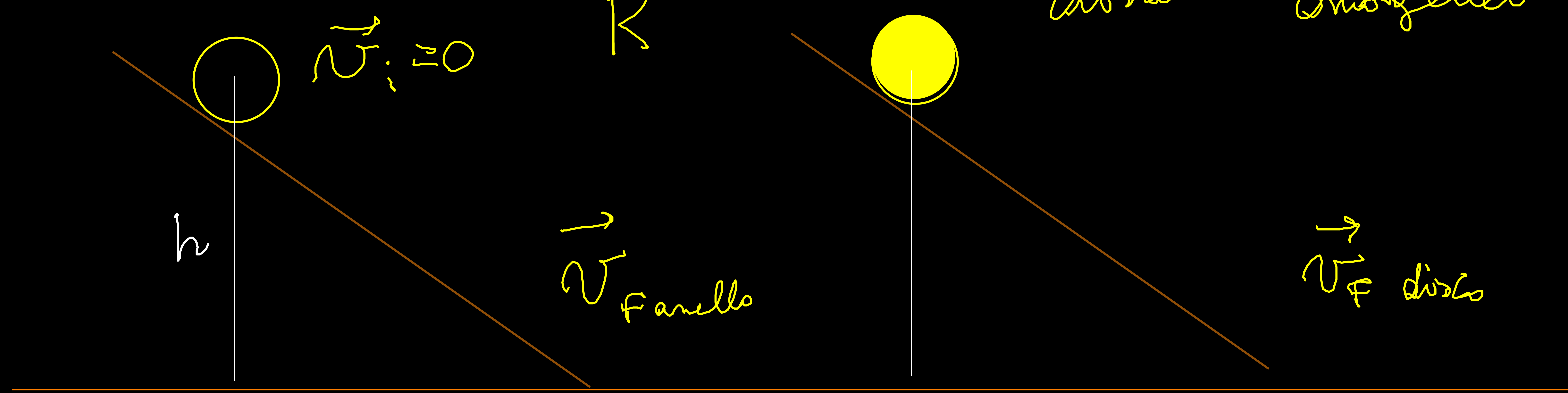
$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

valida anche se rotola con parziale strisciamento, però $v \neq \omega R$

e si mantiene l'orientazione dell'asse di rotazione.

Esempio 12.10 + 12.9

Confrontare anello R v.s. cilindro pieno omogeneo R
disco



Si conserva l'energia meccanica, la forza di attrito statico non fa lavoro

$$E_i = E_f$$

$$\underbrace{K_i}_{=0} + U_i = K_f + U_f$$

$$K_f = \underbrace{U_i - U_f}_{Mgh}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\underbrace{\omega^2}_{v^2/R^2}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \frac{v^2}{R^2} = Mgh$$

$$v^2\left(1+\frac{I_{cm}}{MR^2}\right) = 2gh$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{cm}}{MR^2}}}$$

$$I_{cm}^{anello} > I_{cm}^{disco}$$

$$v_{anello} < v_{disco}$$

cilindro

lento $v_{anello} = \sqrt{gh}$

medio $v_{disco} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$

veloce $v_{scatola} = \sqrt{2gh}$

Per l'anello en. pot. si trasforma

50% in K_{rot} e 50% K_{trasl}.

Per disco omogeneo (o cilindro pieno)

33% K_{rot} 67% K_{trasl}

Per strisciamento senza att. 100% K_{trasl}