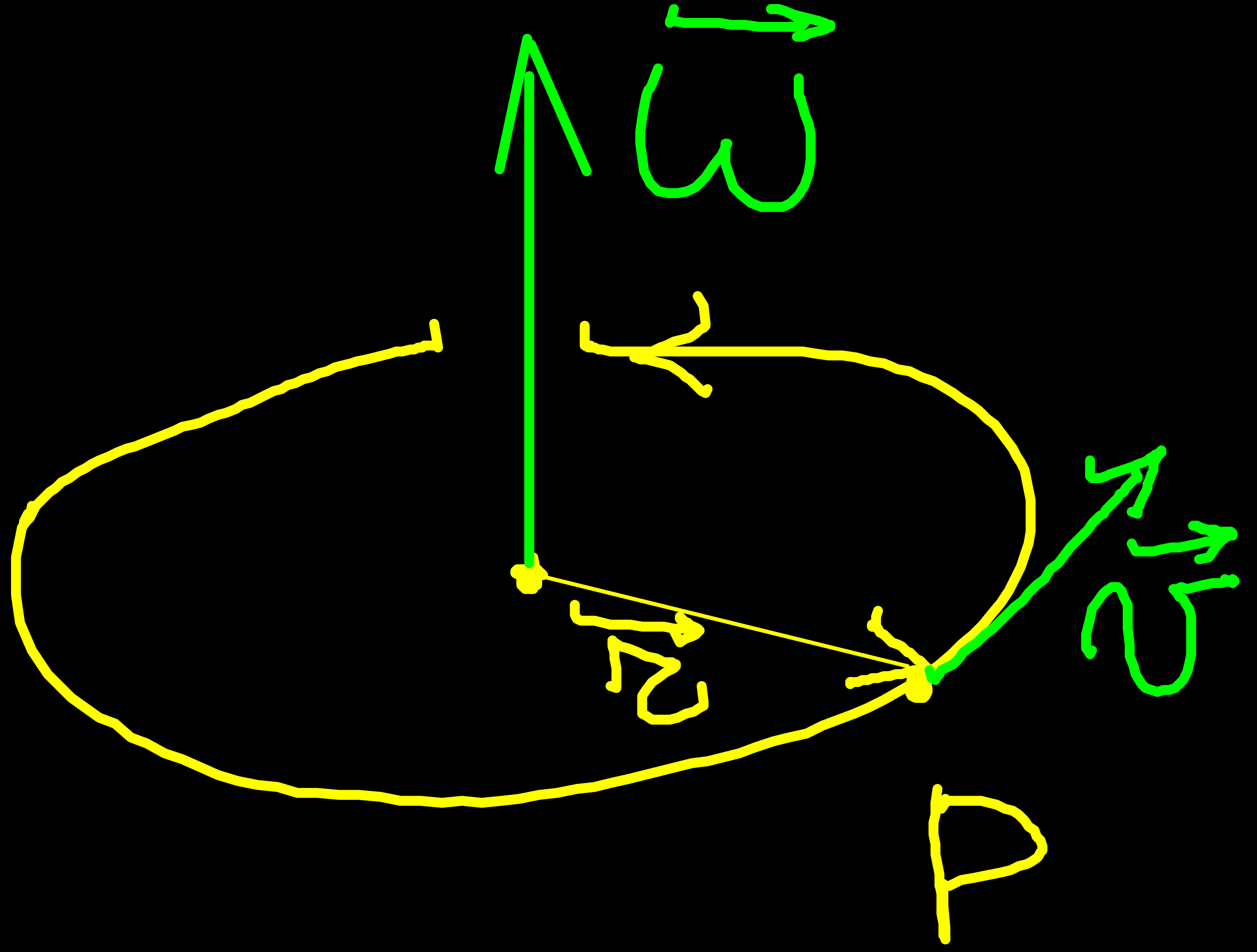
ROTAZIONI

Relazione fra velocità di un punto P in moto circolare e velocità angolare



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Cap. 12 Cinematica del moto rotatorio del corpo rigido.

Ho un corpo rigido : ho specificato la forma esatta del corpo una volta per tutte.

Nel suo moto traslatorio ogni suo punto subisca lo stesso spostamento.

⇒ velocità di ogni suo punto è la stessa in ogni istante

⇒ BASTA SOLO UN VETTORE PER DESCRIVERLA ! ES. c.m.

GRADI di LIBERTÀ g.d.l.

DOF

di un sistema fisico

parametri necessari e suff. per descrivere lo stato del sistema.

Esempio 1 punto materiale

3 g.d.l. (DOF)

→ le 3 coordinate del vettore posizione

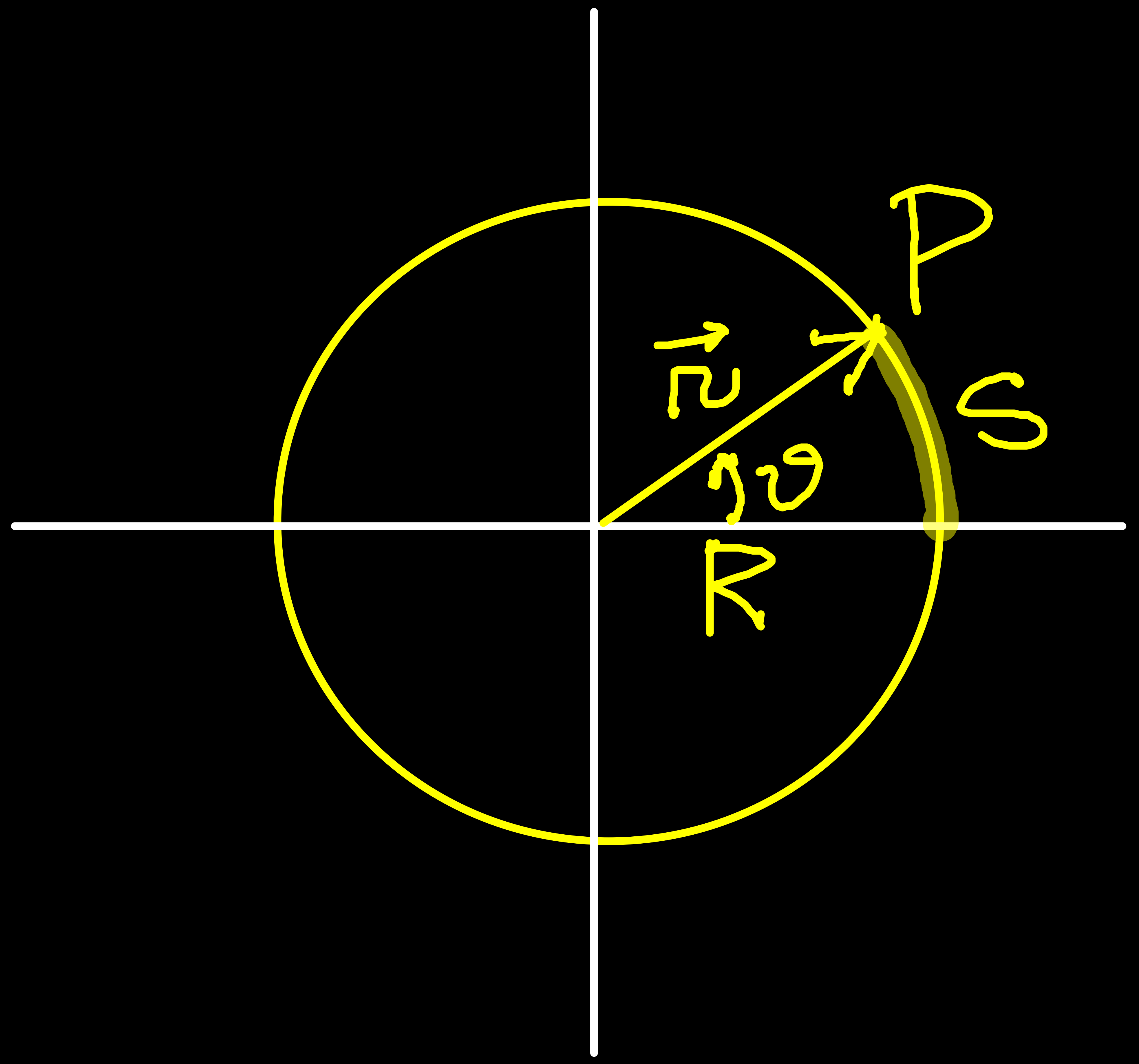
cartesiane, sferiche, ...

Per N punti 3×N DOF

Per un corpo rigido ho bisogno

- 6 = 3 per descrivere le traslazioni
  3 " " " rotazioni
- Se asse fisso solo 1 DOF : rotazione attorno all'asse

Misura degli angoli



$$\vartheta = \frac{S}{R}$$

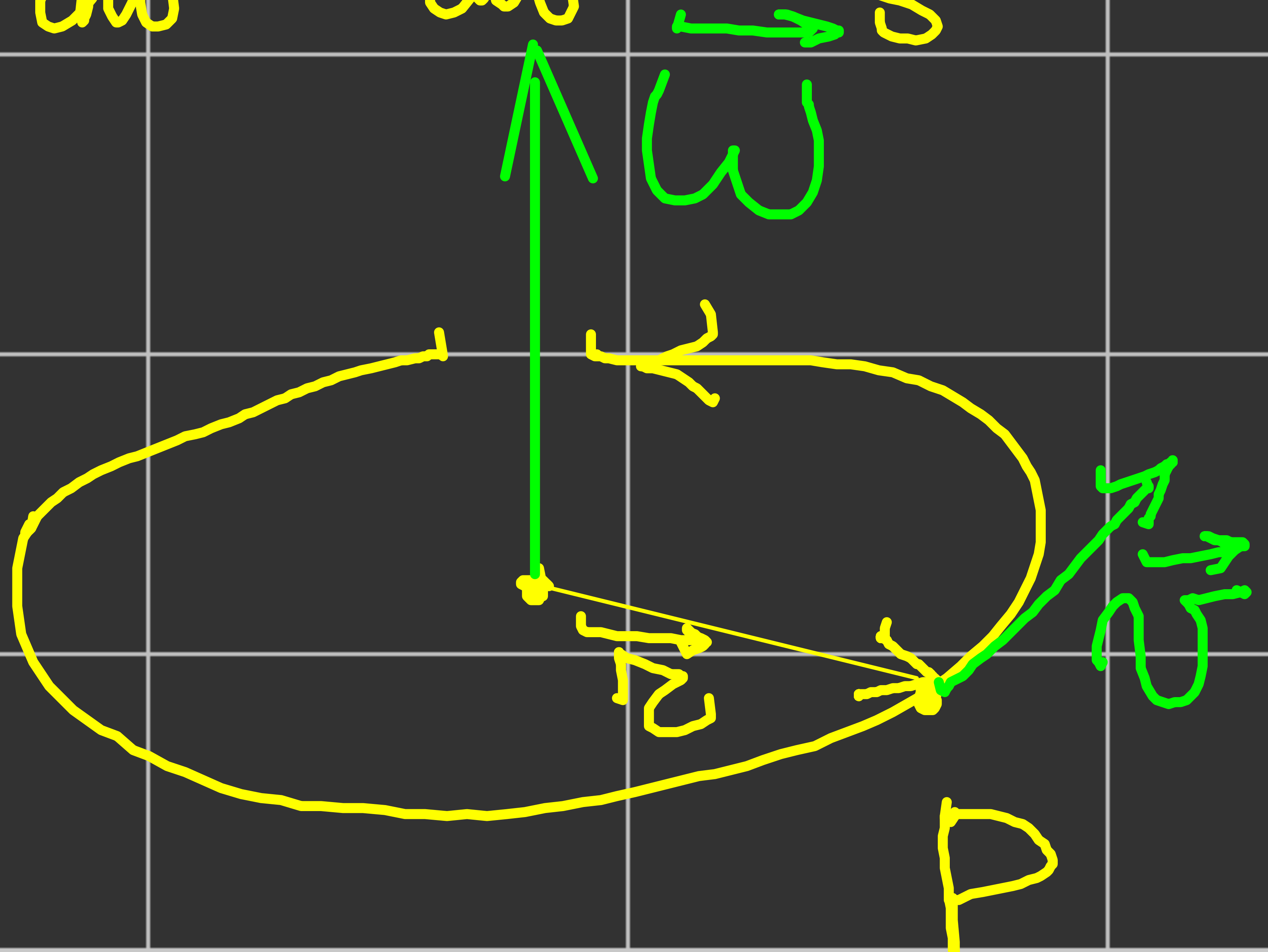
unità rad

Nel moto circolare

ϑ , ω , α

TABELLA ANALOGIA:

Moto 1D lineare		Moto rotatorio con asse fisso z	
x	m	ϑ	rad
$v_x = \frac{dx}{dt}$	$\frac{m}{s}$	$\omega_z = \frac{d\vartheta}{dt}$	$\frac{rad}{s}$
$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{m}{s^2}$	$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$	$\frac{rad}{s^2}$



Cinematica della rotazione attorno asse fisso per corpo rigido (1 DOF)

— se ω_z è costante (es. $v_x = \text{cost}$ moto rett. unif)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z$$

$$d\theta = \omega_z \, dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} \omega_z \, dt$$

$$\theta - \theta_0 \overset{!}{=} \omega_z \underbrace{\int_0^t dt}_{t}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_z t$$

— acc. ang. cost?

equivalente
moto lineare
unif. accelerato

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \alpha_z$$

$$\int_{\omega_{z0}}^{\omega_z} d\omega_z = \int_0^t \alpha_z \, dt$$

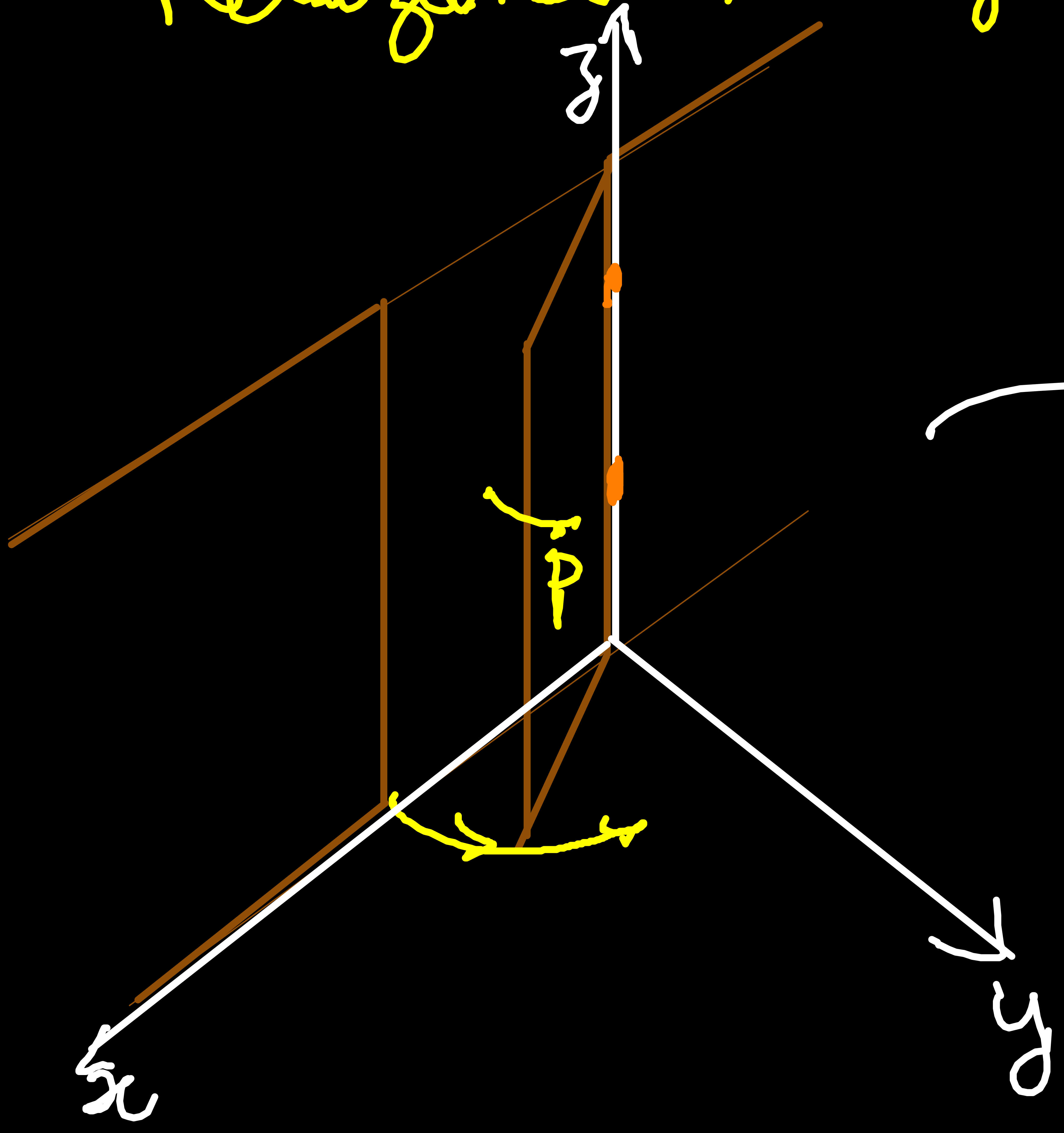
$$\omega_z - \omega_{z0} = \alpha_z \int_0^t dt = \alpha_z t$$

$$\downarrow$$

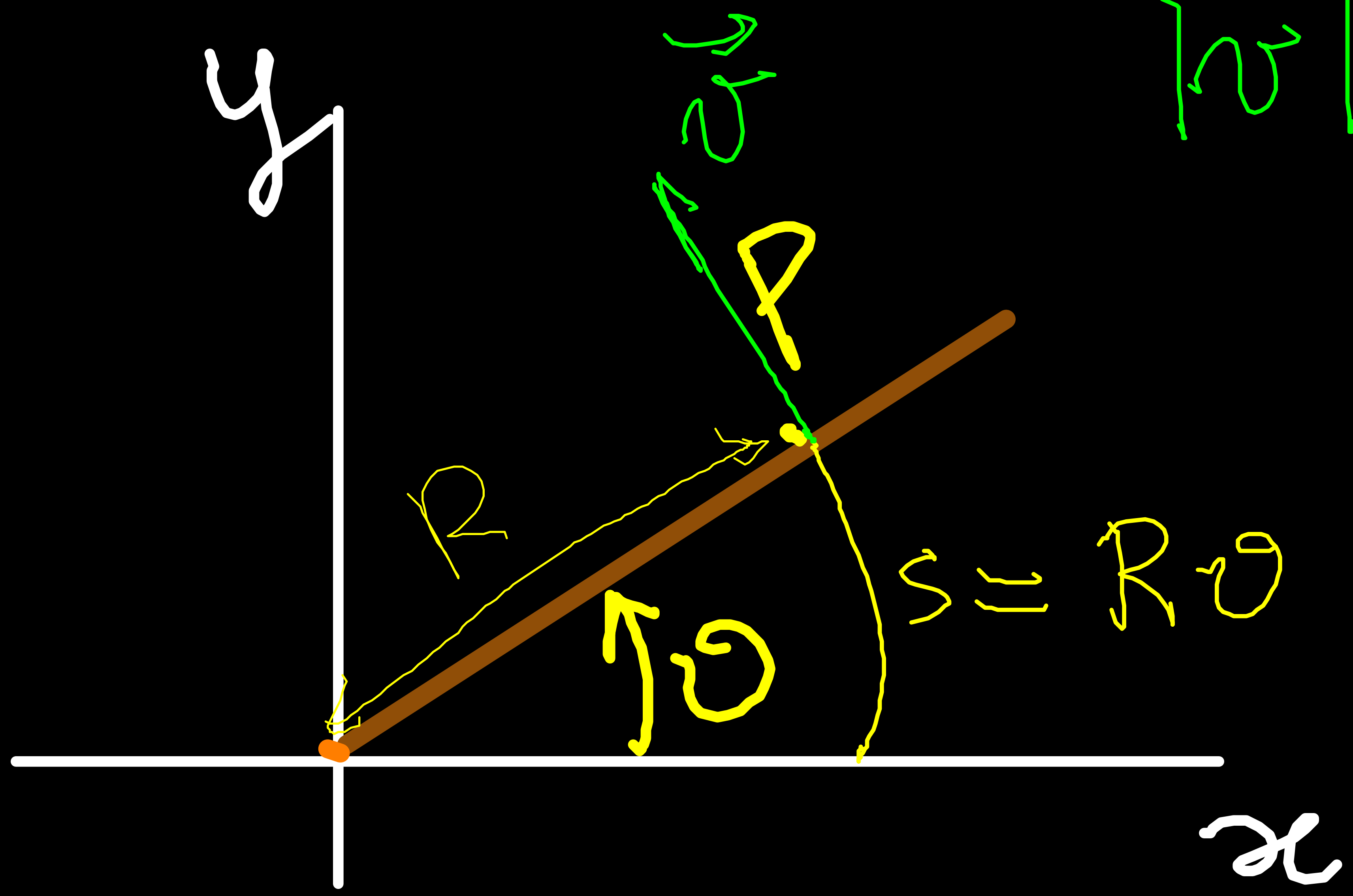
$$\frac{d\vartheta}{dt} \qquad \underbrace{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta}_{\vartheta(t) - \vartheta_0} = \int_0^t (\omega_{0z} + \alpha_z t)\, dt$$

$$\begin{cases} \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \\ \omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\vartheta - \vartheta_0) \end{cases}$$

Relazione tra grandezze lineari e angolari



visto dall'alto



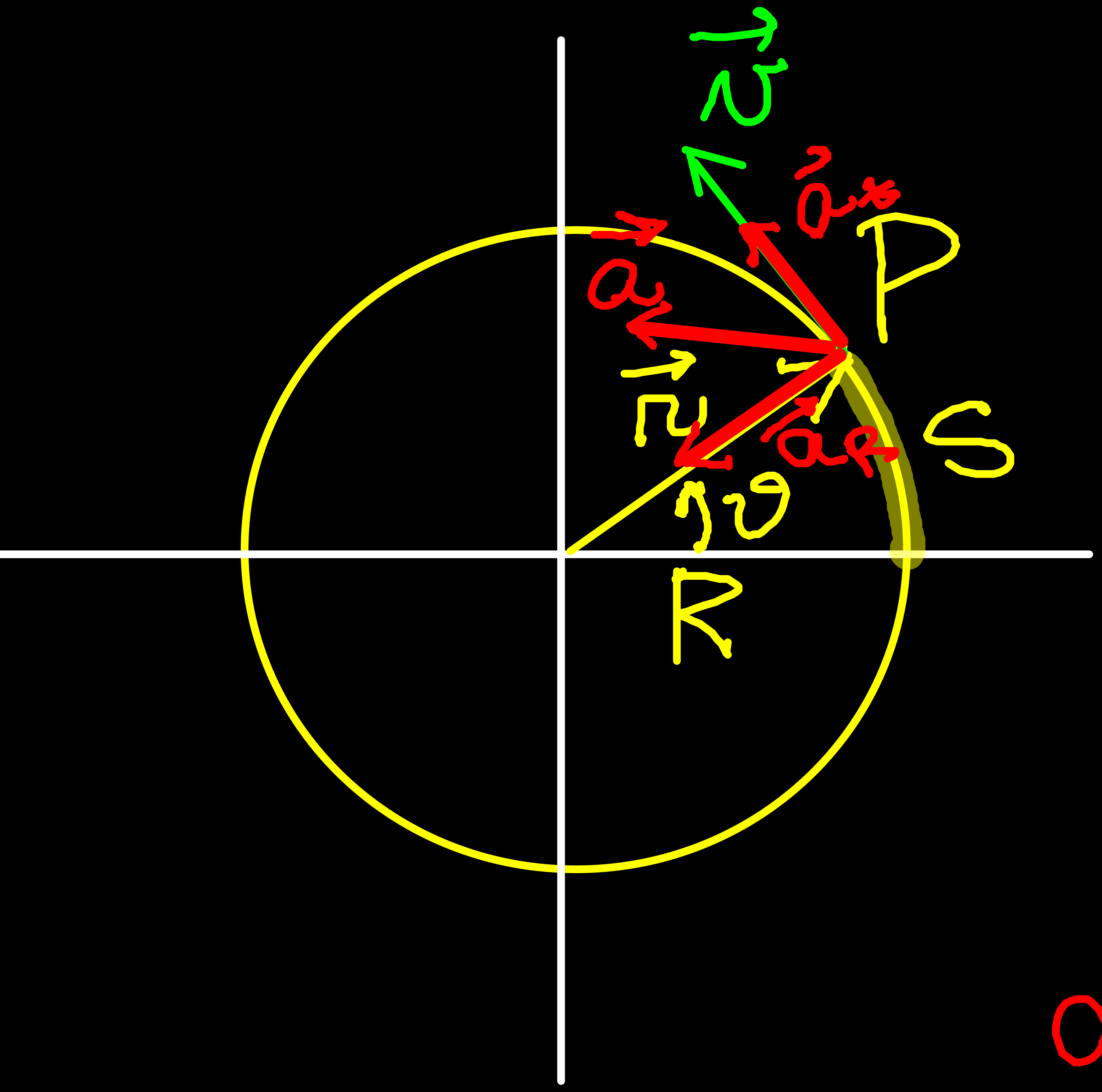
$$|\vec{v}| = |v_t| = R|\omega_z|$$

$$v_t = \frac{ds}{dt}$$ vel. tang. di P

$$= \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega_z$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

e l'accelerazione lineare?



tangenziale

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d(R\omega_z)}{dt} = R\frac{d\omega_z}{dt} = R\alpha_z$$

NOTA: è prop. R
è nulla moto circ. unif

radiale

$$a_R = \dots = R\omega_z^2$$

$$a_R \perp a_t \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_R^2} = \sqrt{R^2\alpha_z^2 + R^2\omega_z^4}$$

$$= R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Caso rotazioni non asse fisso!

cenni

6 DOF

moto roto - traslatorio

$\vec{v}_P$ (P punto rappres.) descrive traslazioni

$\vec{\omega}$ descrive le 3 possibili rotazioni nello spazio

esempi: moto di un drone, elicottero, aeromobile, nave, sommergibile

Energia cinetica nelle rotazioni

- per un punto $K = \frac{1}{2} m v^2$
- per n punti $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- corpo rigido: tutti i punti ruotano attorno asse fisso
  asse fisso

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (R_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i R_i^2}_{I}$$

momento
d'inerzia
rispetto all'asse
da cui si calcolano R_i

$$I = \sum m_i R_i^2$$

analogo rotatorio della massa

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

I è l'analogo della massa, con delle differenze: se cambio asse, cambia I!

TABELLA ANALOGIA:

	Moto 1D lineare		Moto rotatorio con asse fisso z	
	x	m	ϑ	rad
	$v_x = \frac{dx}{dt}$	$\frac{m}{s}$	$\omega_z = \frac{d\vartheta}{dt}$	$\frac{rad}{s}$
	$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\frac{m}{s^2}$	$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$	$\frac{rad}{s^2}$
K	$\frac{1}{2} m v^2$		$\frac{1}{2} I \omega^2$	

Calcolo del momento d'inerzia

caso semplice

- Se tutte le m_i sono alla stessa distanza dall'asse $I = \sum m_i R_i^2 = \left(\sum m_i\right) R^2 = M R^2$

caso continuo

$$I = \sum \Delta m_i R_i^2 \overset{!}{=} \sum \rho_i \Delta V_i R_i^2$$

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

densità

volume

limite $\Delta V_i \to dV$ $\quad \sum \longrightarrow \int$

caso continuo

$$I = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum \rho_i \Delta V_i R_i^2$$

$$= \int_{\underset{\text{corpo}}{V}} \rho R^2 dV$$

se ρ = uniforme $\quad I = \rho \int_V R^2 dV$

se ho un corpo con tutta la massa alla stessa distanza da un asse: es. anello o cilindro vuoto

$$I = mR^2$$