$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}}$$

$$\boxed{K = K' + K_{cm}}$$

comportamento "medio" del sistema $\longrightarrow$ cm

per $\vec{P}$ $\left(= M \underbrace{\vec{v}_{cm}}\right)$ semplice!

- molto diverso singolo corpo

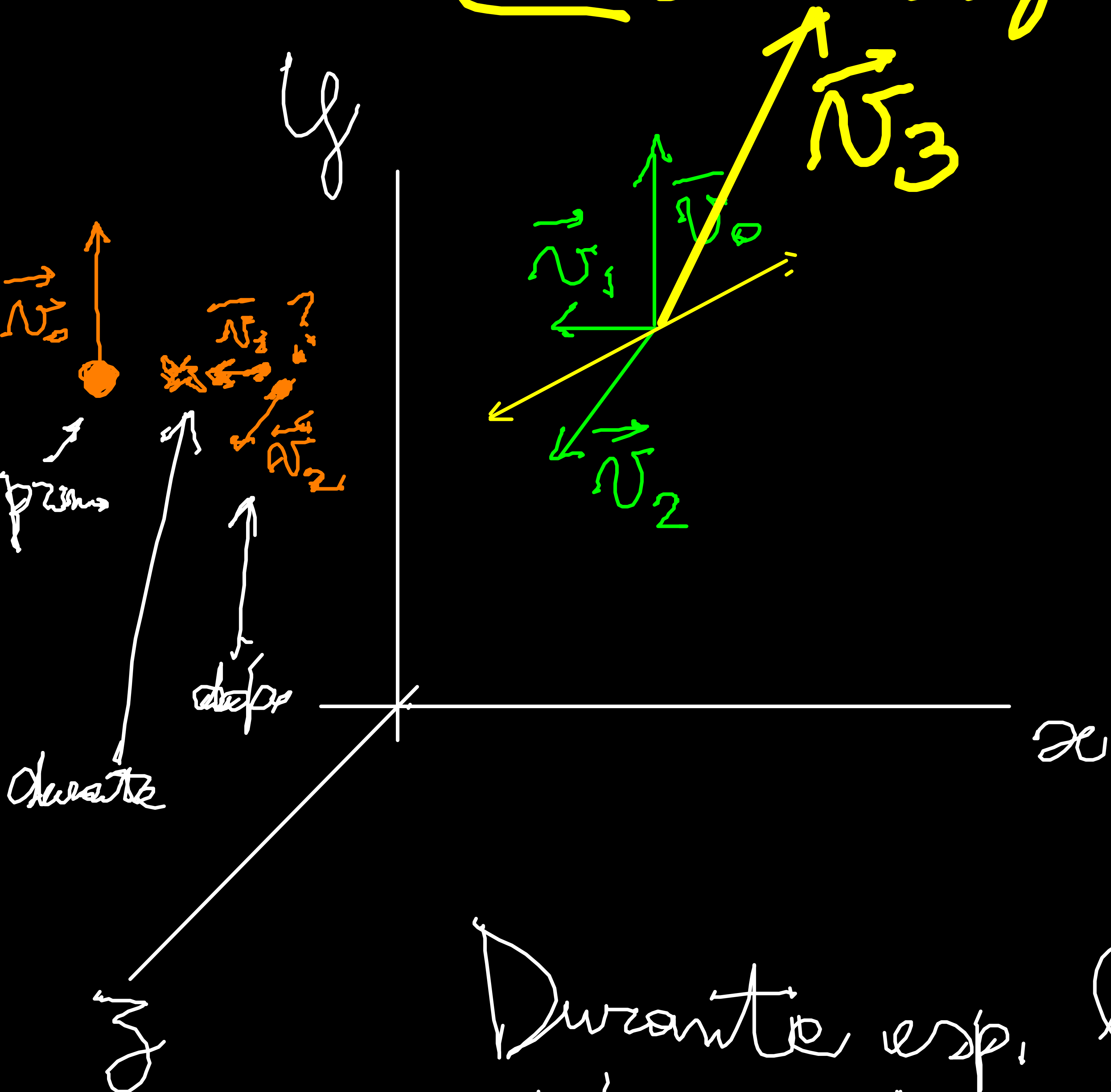
- casi nulli $\vec{P} = 0 \not\Rightarrow \vec{L} = 0$

  $\vec{L} = 0 \not\Rightarrow \vec{P} = 0$

- Per K nel sistema $K_{cm} = 0$ $\not\Rightarrow K = 0$

  $\Rightarrow K' = 0$

Esercizio: razzo esplode in volo vert.



$\vec v_0 = 400\,m/s\,\hat j$

3 frammenti di uguale massa m

$\vec v_1 = -300\,m/s\,\hat i$

$\vec v_2 = 450\,m/s\,\hat k$

$\vec v_3 = ?$

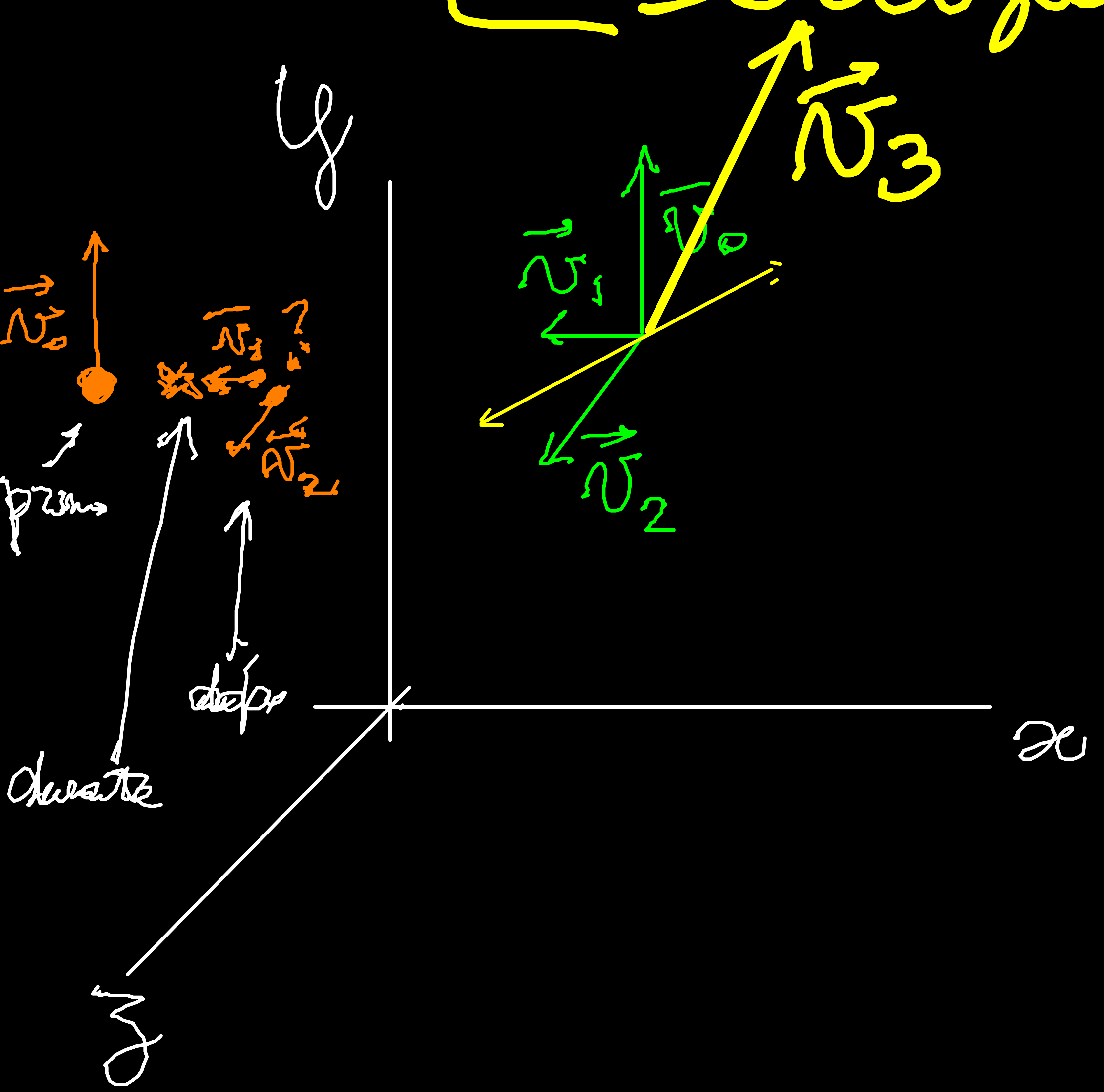
Durante esp. forze interne impulsive, agisce anche forza peso, trascurabile durante
$\approx$ no forze esterne! $\Longrightarrow$ $\vec P$ si conserva

$$\vec P_{prima} = \vec P_{dopo}$$

$$3\cancel{m}\,\vec v_0 = \cancel{m}\,\vec v_1 + \cancel{m}\,\vec v_2 + \cancel{m}\,\vec v_3$$

$$\vec v_3 = 3\vec v_0 - \vec v_1 - \vec v_2 = 300\,\tfrac{m}{s}\,\hat i + 1200\,\tfrac{m}{s}\,\hat j - 450\,\tfrac{m}{s}\,\hat k$$

Esercizio: razzo esplode in volo vert.



$\vec{v}_0 = 400\,m/s\ \hat{j}$

3 frammenti di uguale massa m

$\vec{v}_1 = -300\,m/s\ \hat{i}$

$\vec{v}_2 = 450\,m/s\ \hat{k}$

1) $|\vec{v}_3| = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2} = 1320\,m/s$

2) Quanta energia si sprigiona sapendo che $M = 3m = 9\cdot10^3\,Kg$?

3 0 1 2

$$K_{prima} = \frac{1}{2} M v_0^2 = 0{,}72 \cdot 10^9\ J$$

$$K_{dopo} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 = \underbrace{3{,}05 \cdot 10^9\ J}_{\sim 4\times \text{ iniziale}}$$

da König

$$K_{dopo} = K_{cm} + K'_{dopo}$$

$$K'_{dopo} = K_{dopo} - K_{cm} = \underbrace{K_{dopo} - K_{prima}}_{\text{en. cinetica rilasciata nell'esp}}$$

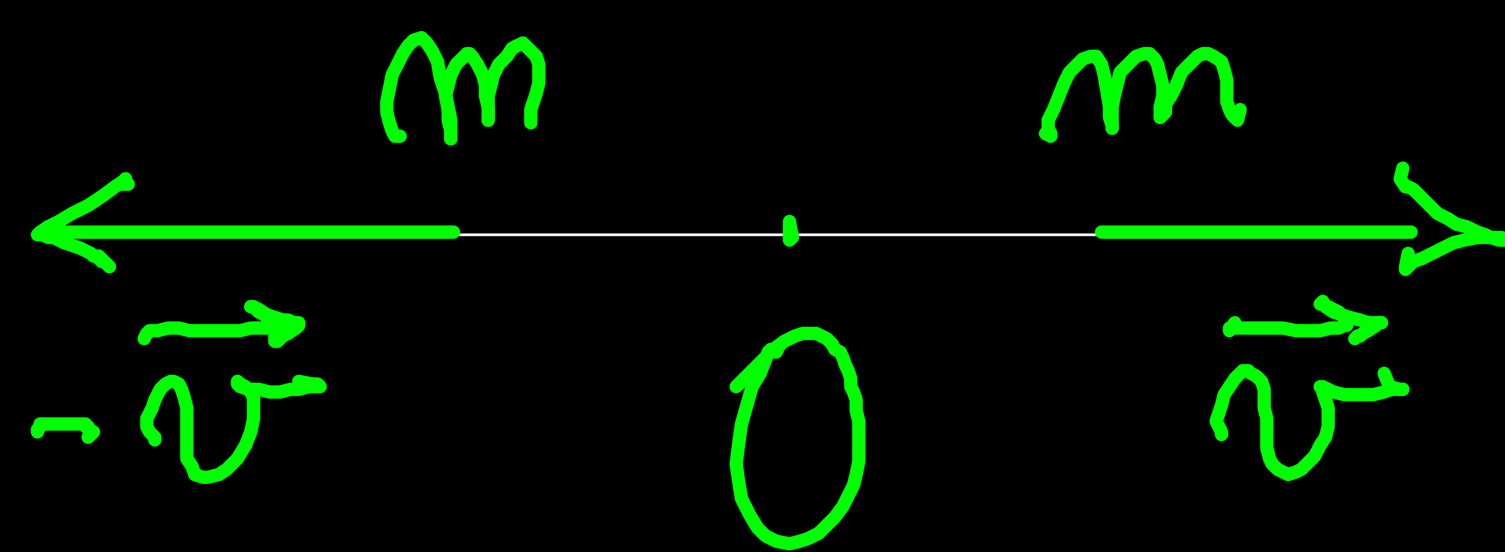
dovuta alle forze interne non conservative

Esercizio König $\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$ 2 corpi

K, K', K_{cm} O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

(a)



$cm \equiv O$ $\vec{L} = 0$ $\vec{r}_i \,//\, \vec{v}_i$

$\vec{v}_{cm} = 0$ $\vec{L}_{cm} = 0$ $\vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$

$\vec{L}' = 0$

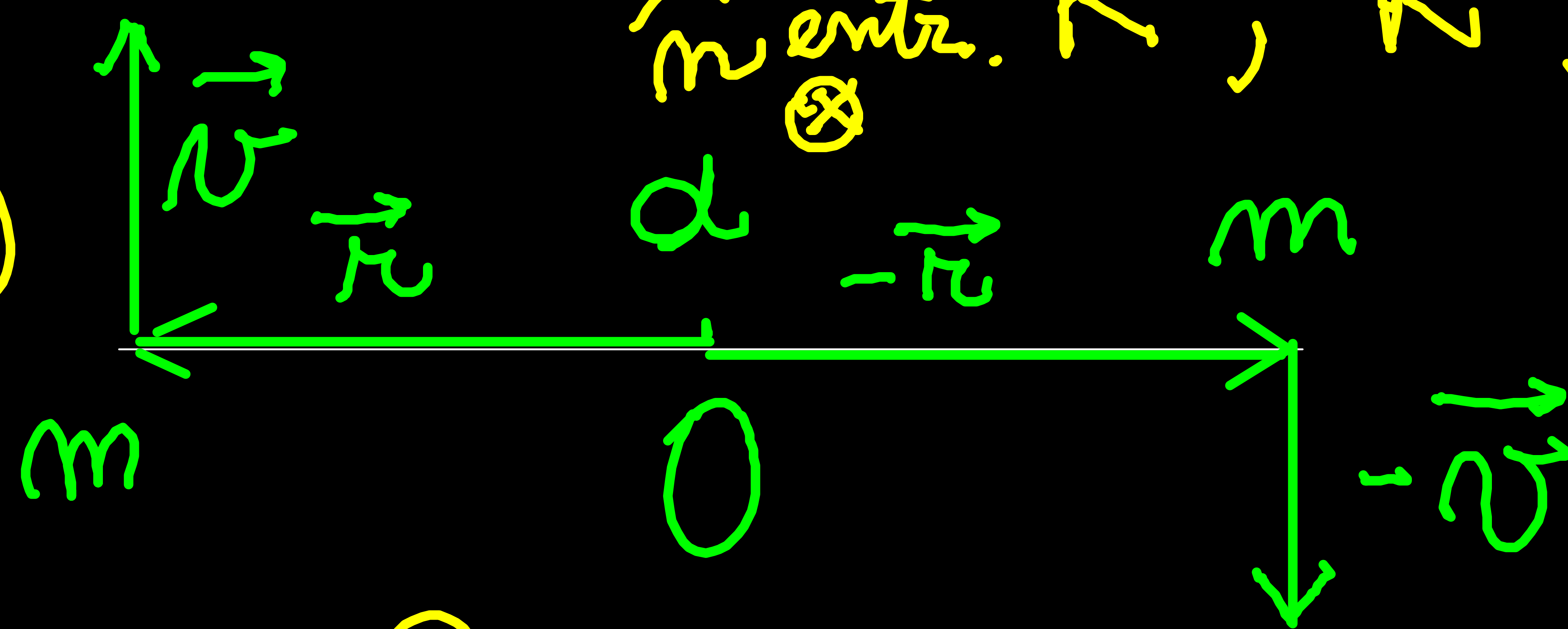
$K_{cm} = 0$

$$K = K' = 2\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \boxed{m v^2}$$

Esercizio König $\vec{L}$, $\vec{L}'$, $\vec{L}_{cm}$ — 2 corpi

$\hat{n}$ entr. $\otimes$ — K, K', K_{cm} — O origine s.i. polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

(b)



$cm \equiv O$

$\vec{v}_{cm} = 0 \Longrightarrow K_{cm} = 0$, $\vec{L}_{cm} = 0$

$$\vec{L} = \vec{L}' = \vec{r} \times m\vec{v} + (-\vec{r} \times m(-\vec{v}))$$
$$= 2\vec{r} \times m\vec{v} = 2mrv\,\hat{n}$$
$$= mdv\,\hat{n}$$

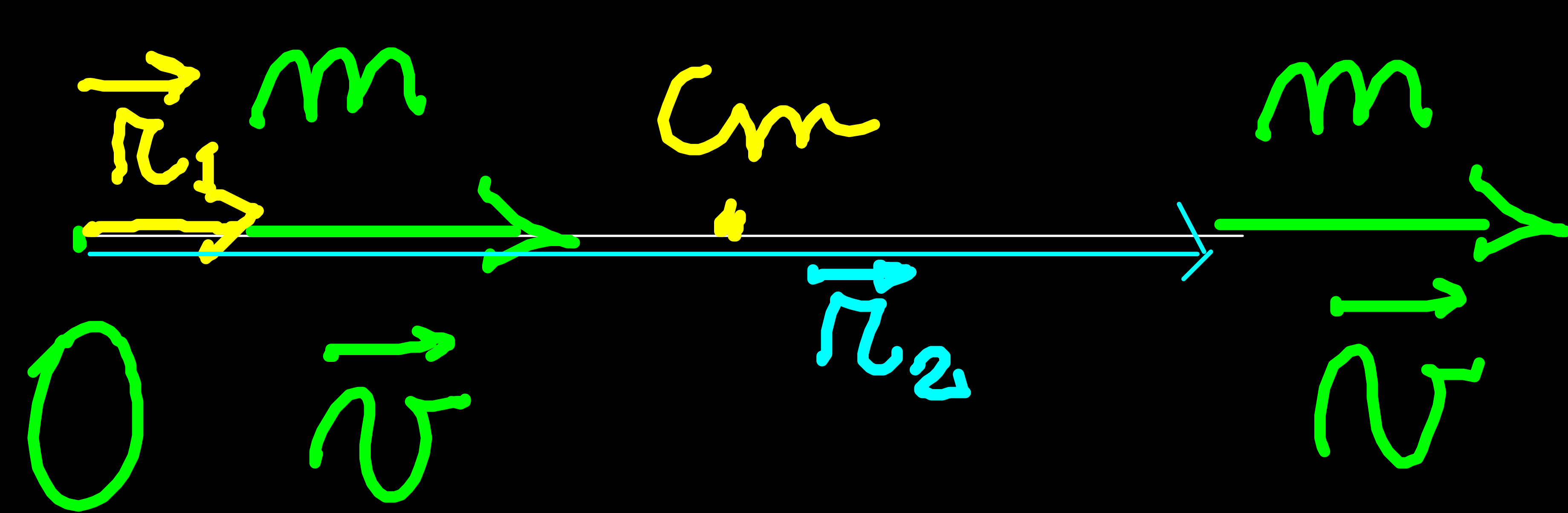
K, K' come (a)

Esercizio König $\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$ 2 corpi

K, K', K_{cm} O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

(c)



$\vec{r}_1$

$\vec{r}_2$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$$

sta in mezzo

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{P}}{m_{tot}} = \frac{2m\vec{v}}{2m} = \vec{v}$$

$\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} = 0$ $\vec{r}_{cm} // \vec{v}_{cm}$

$\vec{L} = 0$ $\vec{r}_i // \vec{v}_i$, $\vec{L}' \begin{cases} = 0 \text{ per König} \\ = 0 \ \vec{v}_i' = 0 \end{cases}$

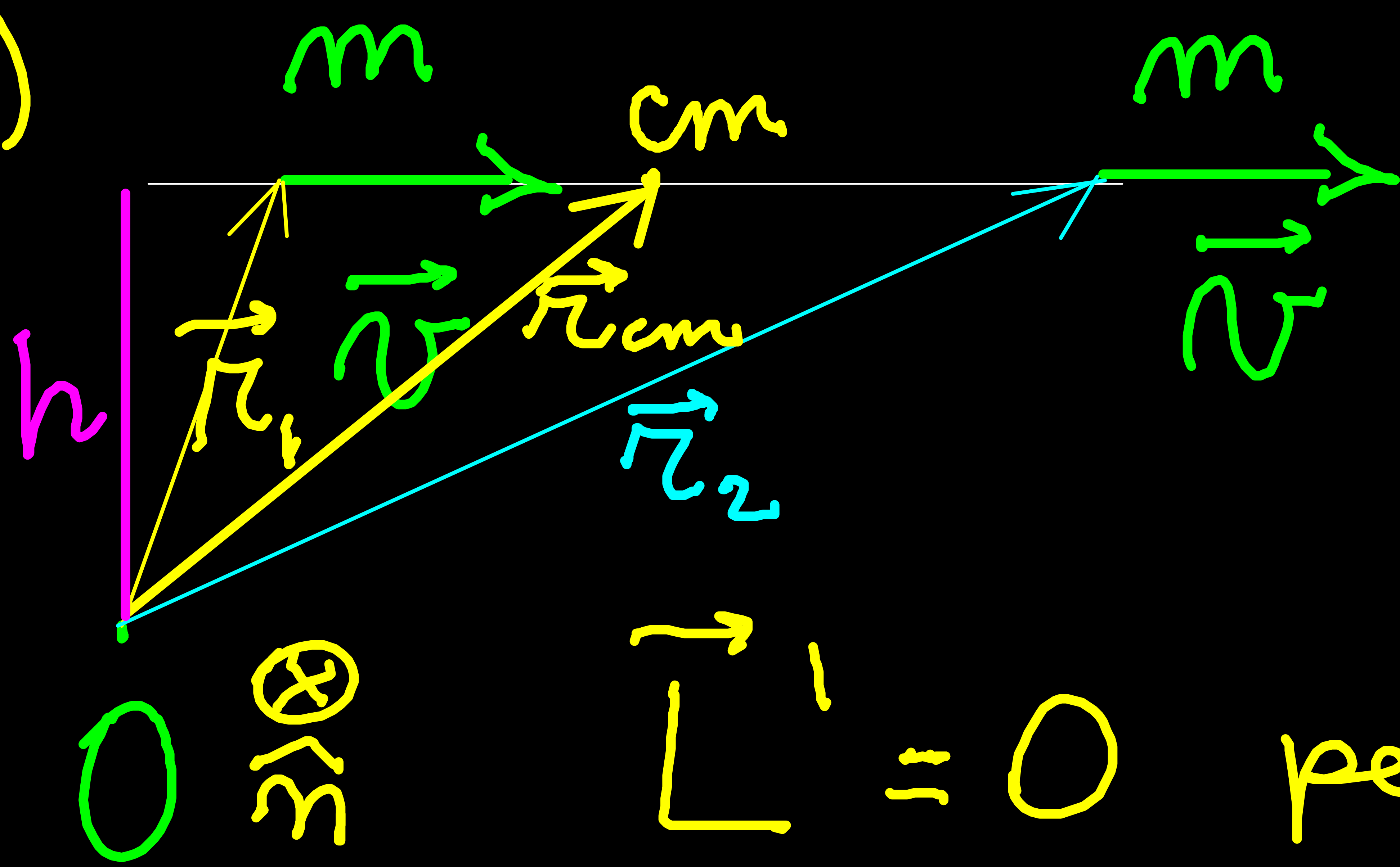
$K = K_{cm} = mv^2$ $K' = 0$ $\vec{v}_i' = 0$

Esercizio König $\vec{L}, \vec{L}', \vec{L}_{cm}$ 2 corpi

K, K', K_{cm} O origine s.i.

polo per $\vec{L}$ $\vec{L}_{cm}$

(d)



$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{cm} \\ \vec{v}_{cm} \end{array} \right.$ come nel caso (c)

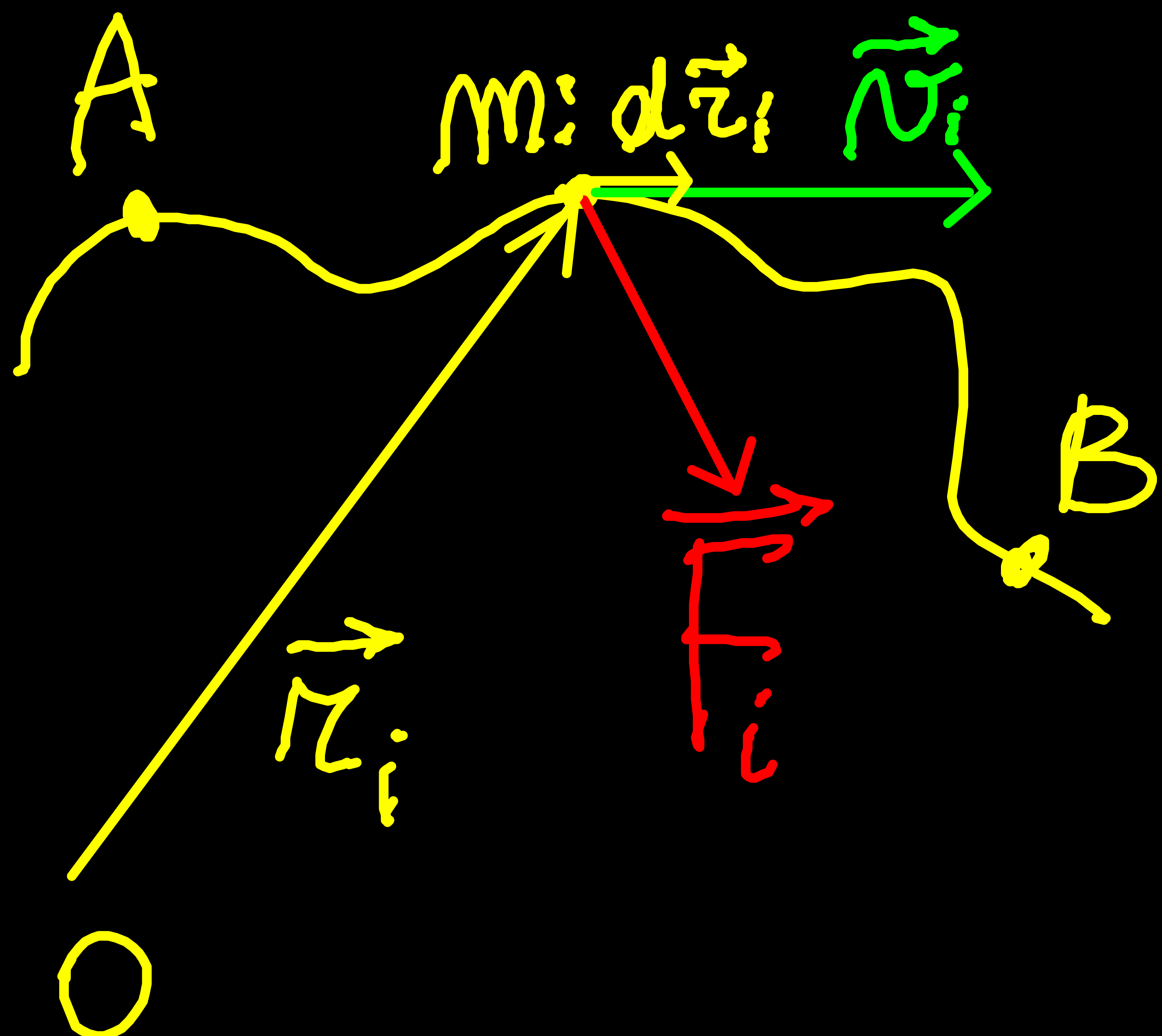
$\vec{L}' = 0$ perché $\vec{v}_i' = 0$

$\vec{L} = \vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times 2m\vec{v}_{cm}$

$= 2hmv\,\hat{n}$

K, K', K_{cm} come nel caso (c)

Teorema dell'energia cinetica nei sistemi



$A \to B$

Lavoro associato moto di tutti i corpi del sistema

N corpi, i-esimo

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(E)} \cdot d\vec{r}_i}_{dW_i^{(E)}} + \underbrace{\vec{F}_i^{(I)} \cdot d\vec{r}_i}_{dW_i^{(I)}}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \sum dW_i = W^{(E)} + W^{(I)}$$

Attenzione rispetto al $\vec{L}$ non scompare contr. forze interne!

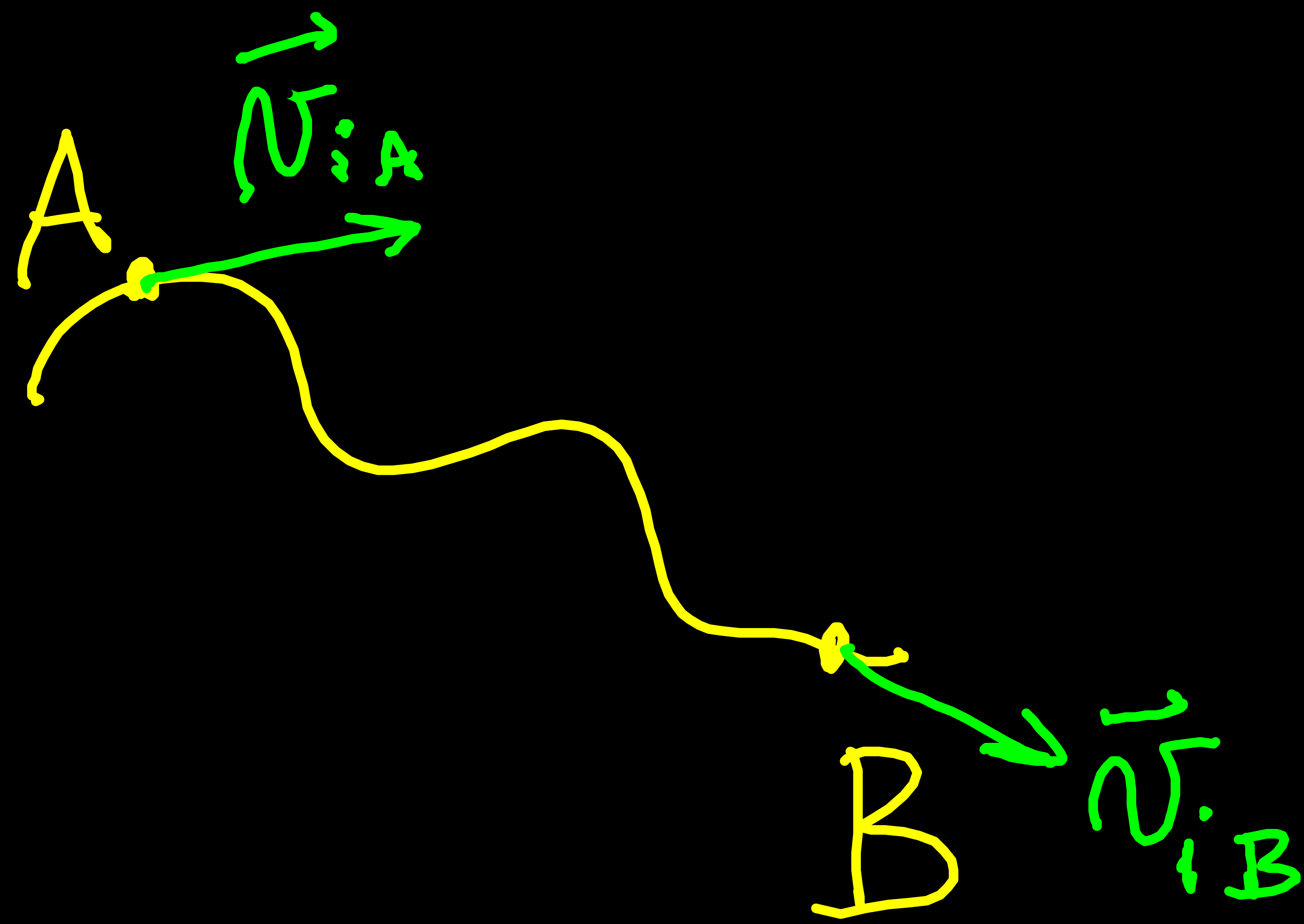
$$\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{-\vec{F}_{ij}} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot \underbrace{(d\vec{r}_j - d\vec{r}_i)}_{d(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}$$

$$= \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

posizione relativa di j risp. i che cambia durante il moto!

lavoro forze interne legato cambiamento dist. mutue!

$W^I = 0$ quando le dist. non cambiano come corpo rigido!



$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i$$

$$= m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = m_i d v_i^2$$

$$W_i = \Delta K_i = \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2$$

$$W = \sum W_i = \sum \Delta K_i = \underset{\text{fin}}{K_B} - \underset{\text{in.}}{K_A}$$

Teor. energia cin. sist. corpi $\boxed{W^{(E)} + W^{(I)} = \Delta K}$

Inoltre

Se le forze interne (esterne) conservative

$$W^{(I)} = -\Delta U^{(I)} \quad \left(W^{(E)} = -\Delta U^{(E)} \right)$$

Se tutte le forze int + est. cons.

abbiamo anche qui cons. en. mecc.

$$W = \Delta K = -\Delta U = -(U_B - U_A)$$

$$E_A = K_A + U_A = E_B = K_B + U_B = \text{cost}$$

Se solo parte delle forze sono conservative

$$E_B - E_A = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = W_{nc}$$

Osserv. anche in assenza di forze esterne (sistemi isolati)

non è detto che l'energia mecc.

si conservi!

dipende dalla natura delle forze interne

Però, se nel processo complessivo, consideriamo tutti i possibili scambi di energia (non solo meccanici) allora l'energia totale (complessiva) si conserva → 1° principio termodinamica

Eq cardinali della dinamica

Cap. 13

$$\begin{cases} \vec{R}^{(E)} = \sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{M}^{(E)} = \sum \vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

Leggi di conservazione

Se $\vec{R}^{(E)} = \sum \vec{F}_{est} = 0$ si cons. $\vec{P}$

Se $\vec{M}^{(E)} = \sum \vec{\tau}_{est} = 0$ " $\vec{L}$

Se tutte le forze sono conservative " E

Indipendenti fra di loro, una, nessuna, tutte, qualcuna