$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_0 \times M \vec{v}_{CM}$$

Ipotesi s.r.i.

In gen. O moto

$\vec{L}$ & $\vec{M}$ calc. risp. stesso polo O

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \vec{v}_0 \times M \underline{\underline{\vec{v}_{CM}}}$$

Ipotesi: s.r.i.

* Se inoltre $-\vec{v}_0 \times M \vec{v}_{cm} = 0$ *

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{teorema del momento angolare} \quad \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}}$

$$* \quad -\vec{v}_0 \times M\vec{v}_{cm} = 0$$

1) Polo O fisso $\longrightarrow \vec{v}_0 = 0$

2) c.m. in quiete nel s.r.i.

3) $O \equiv$ c.m. $\longrightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_{cm} \Rightarrow \vec{v}_0 \times \vec{v}_{cm} = 0$

4) $\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_{cm} \longrightarrow$ " $= 0$

La condizione 3) interessante : mi semplifica

Teorema mom. ang. $\times$ sist. punti

analogo rotatorio $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$

2° legge di Newton $\times$ " "

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^{(E)}$$

Conservazione del mom. ang.

Se vale teor. del. mom. ang. & $\vec{M}^{(E)} = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{costante}$$

Cont...

... $\vec{M}^{(E)} = 0$

1) non agiscono $\vec{F}_{ext\,i} = 0$ $\forall$ i corpo

se il sistema è isolato

NOTA: in questo caso $\begin{cases} \vec{P} = cost \\ \vec{L} = cost \end{cases} \leftarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0$

Att: se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ non è detto $\vec{M}^{(E)} = 0$

Esempio  $\Rightarrow \vec{M}^{(E)} \neq 0$

2) Se $\vec{M}^{(E)} = 0$ rispetto un particolare polo. Potrebbe invece non conservarsi $\vec{P}$

Osservazione: questa situazione ci fa capire l'importanza scelta del polo!

Osservazione Sperimentale:

nei sistemi isolati $\vec{L}$ si conserva!

questo rafforza l'assunzione che le forze interne abbiano la stessa retta d'azione

[CONSERVAZIONE di $\vec{P}$ conseg. omogeneità dello spazio

[" " $\vec{L}$ " isotropia " "

6.6. S.R.C.M.

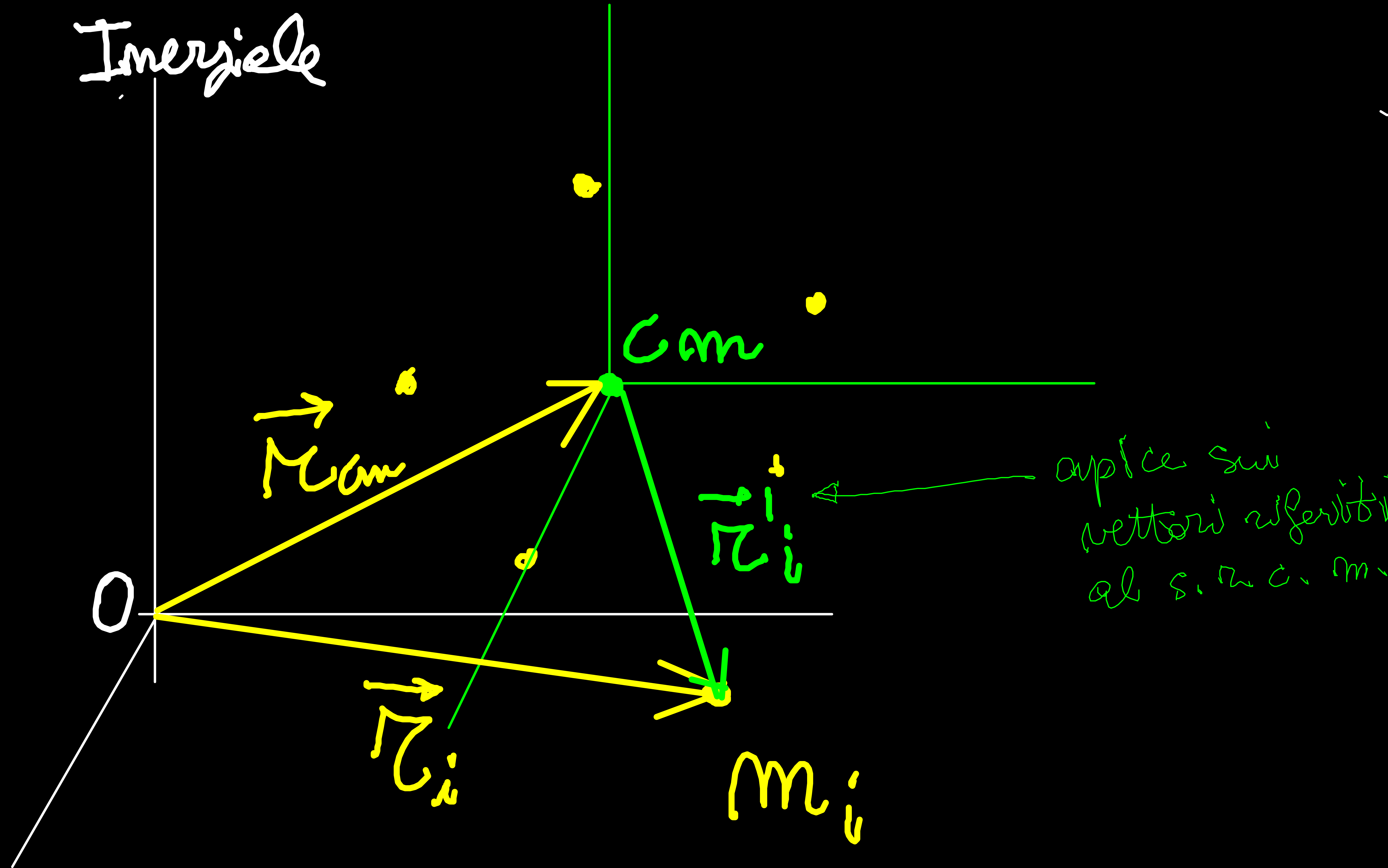
Sistema di riferimento del centro di massa

1) origine nel c.m.

2) assi che <u>devono</u> mantenere sempre la stessa direzione risp. sistema rif. inerziale (meglio ancora se // a questi)

sono quindi nel caso 2) moti relativi sist. non inerziali

Non è in generale un sistema inerziale, a meno che $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0$



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i$$

ovviamente

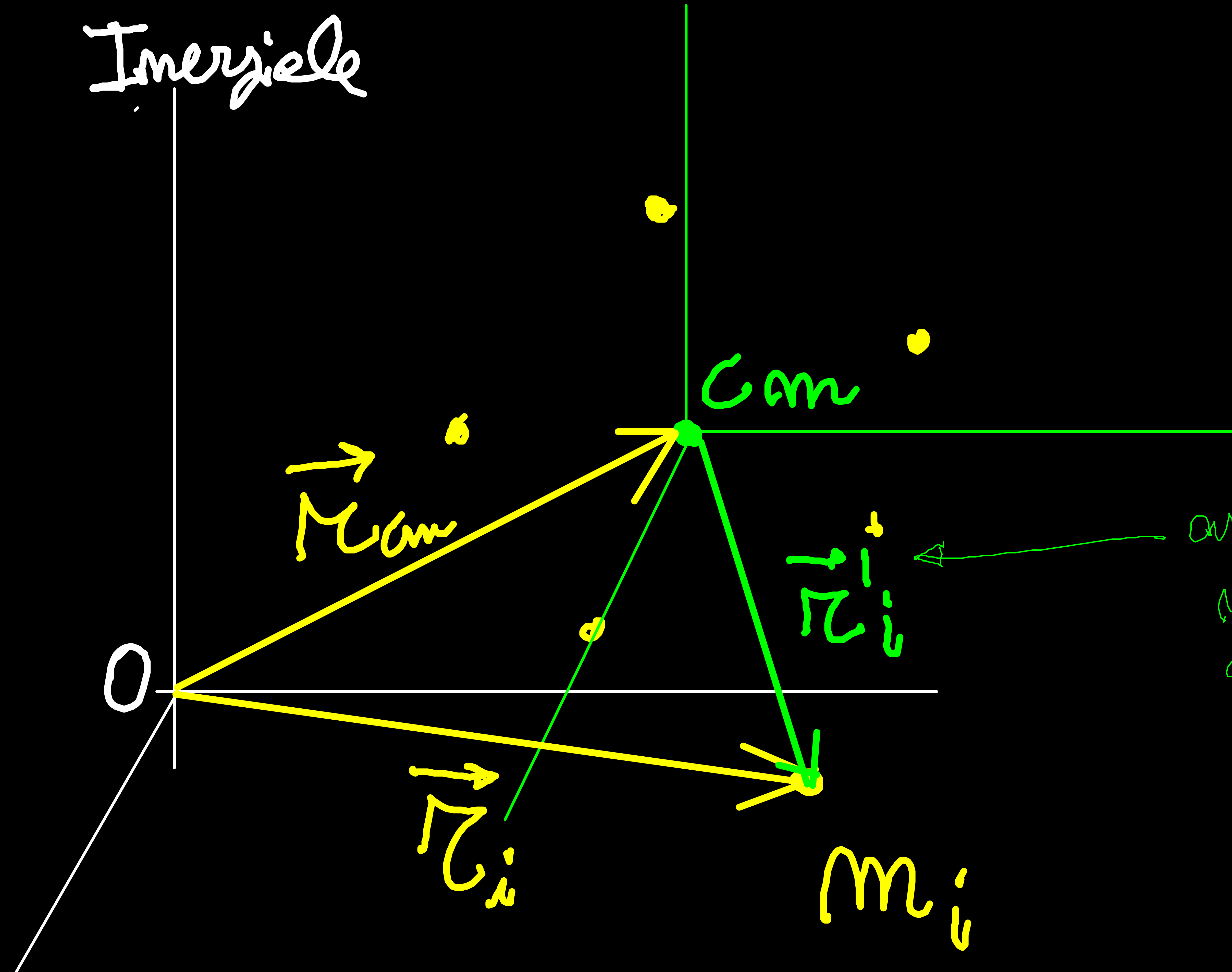
$\vec{r}'_{cm} = 0$ e $\vec{v}'_{cm} = 0$

$$\frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\frac{\sum m_i \vec{v}'_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\vec{P}' = \sum m_i \vec{v}'_i = 0$$

anche se $\vec{v}'_i \neq 0$

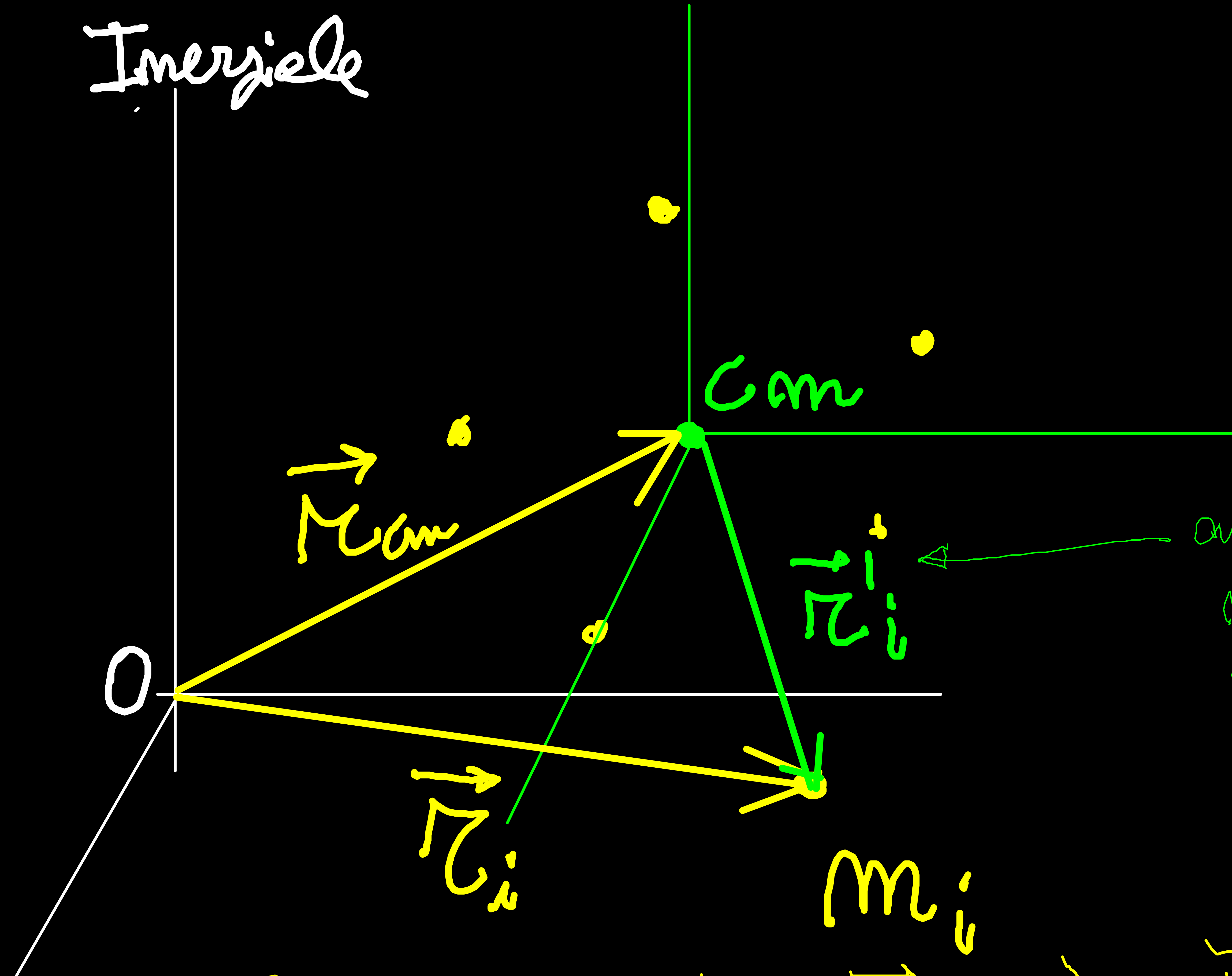


apice sui vettori riferiti al s.r. c.m.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}\,'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i$$

Essendo un sist. non inerziale, sui singoli punti agiscono le forze inerziali (apparenti), ma solo quelle di trascinamento $-m_i \vec{a}_t = -m_i \vec{a}_{cm}$ . . .



apice sui vettori riferiti al s.r. c.m.

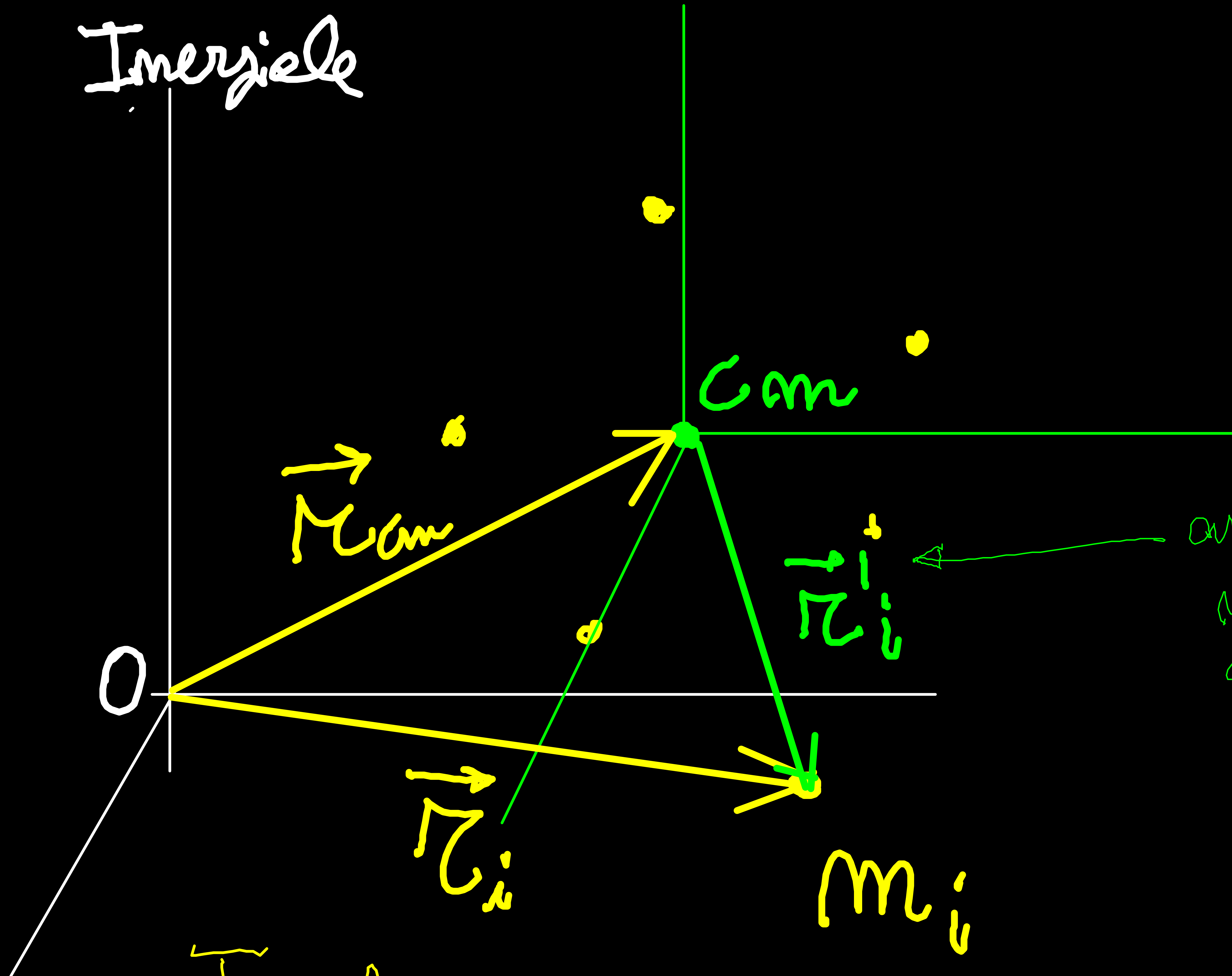
$$\vec r_i = \vec r_{cm} + \vec r_i'$$

$$\vec v_i = \vec v_{cm} + \vec v_i'$$

... per ogni punto i: $\vec F_i^{(E)} + \vec F_i^{(I)} - m_i \vec a_{cm} = m_i \vec a_i'$

Se ora sommo sul sist. $\underbrace{\sum \vec F_{ext} + 0 - \underbrace{\left(\sum m_i\right)\vec a_{cm}}_{m \vec a_{cm}}}_{\text{x teor. moto c.m.} \; = 0} = \sum m_i \vec a_i'$

$$\Rightarrow \boxed{\sum m_i \vec a_i' = 0}$$



apice sui vettori riferiti al s.r.c.m.

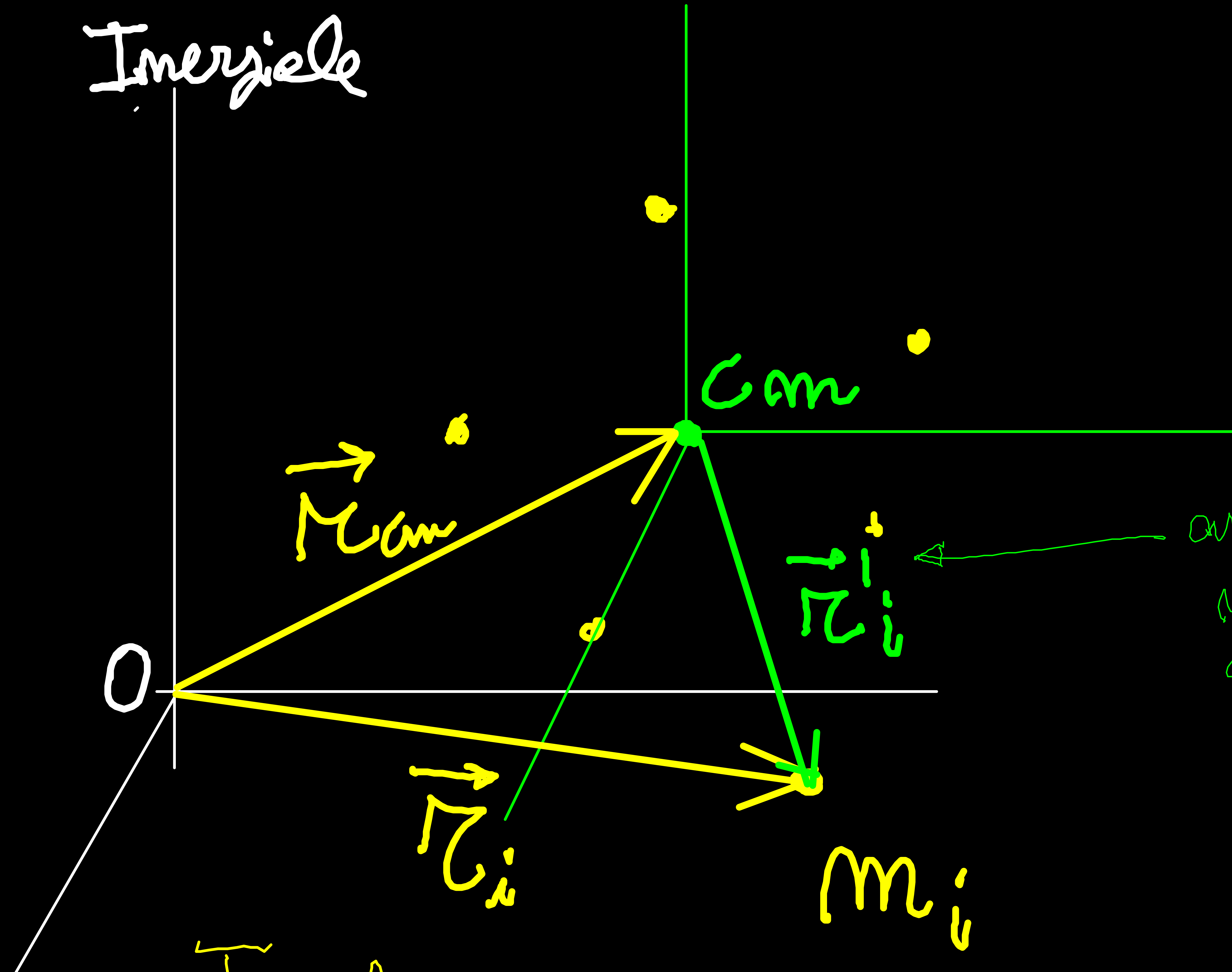
$$\vec r_i = \vec r_{cm} + \vec r_i'$$

$$\vec v_i = \vec v_{cm} + \vec v_i'$$

Infine per i momenti si dimostra che

1) il momento risultante rispetto al cm (nel s.r.c.m) di tutte le forze (interne, esterne, inerziali) = solo $\vec M'^{(E)}$

$$\vec M' = \vec M'^{(E)} = \sum \vec r_i' \times \vec F_i^{(E)}$$



apice sui vettori riferiti al s.r.c.m.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$$

Infine per i momenti:

2) Il momento angolare $\vec{L}' = \sum \left(\vec{r}_i' \times m \vec{v}_i' \right)$

è t.c. $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(E)}$

6.7

Nel s. r. c. m. 2 Teoremi di König

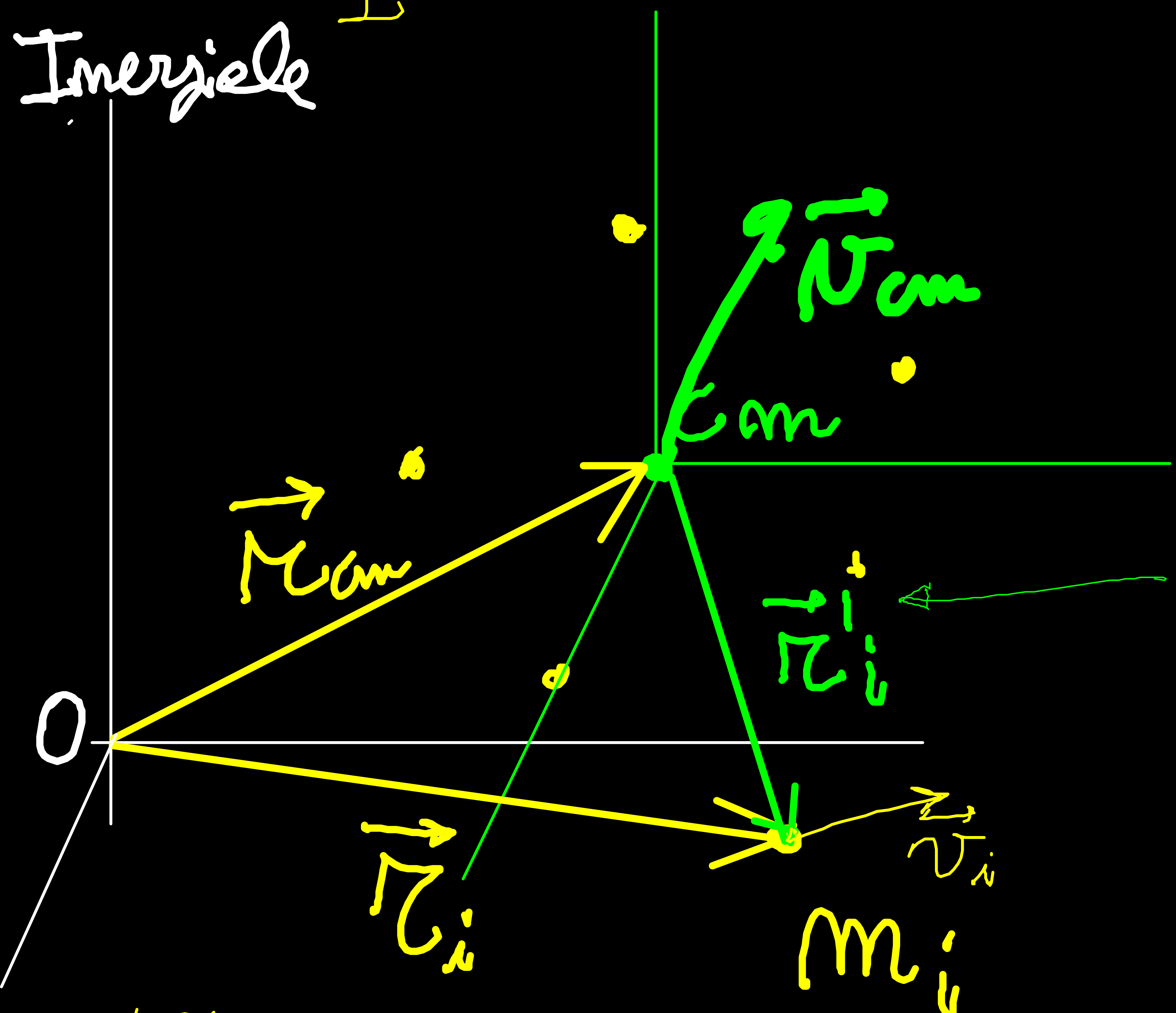
che mettono in relazione momento angolare

e en. cinetica del sistema di corpi

misurati nel s. r. i. con quelli

" " s. r. c. m.

1° teorema di K. mom. ang.



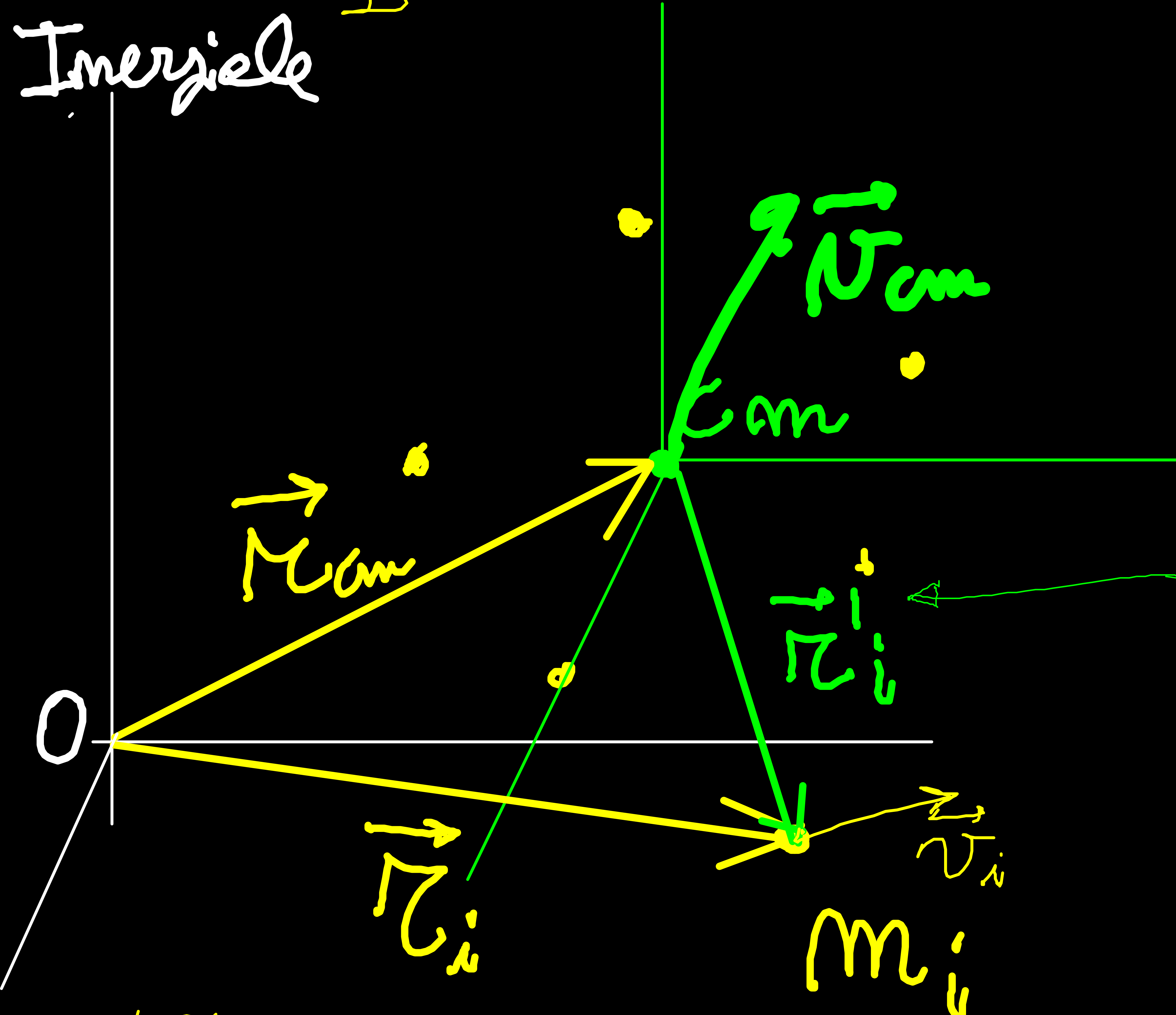
nel s. i. prendo O come polo

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}\,'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'_i$$

1° teorema di K. mom. ang.



nel s.i. prendo O come polo

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

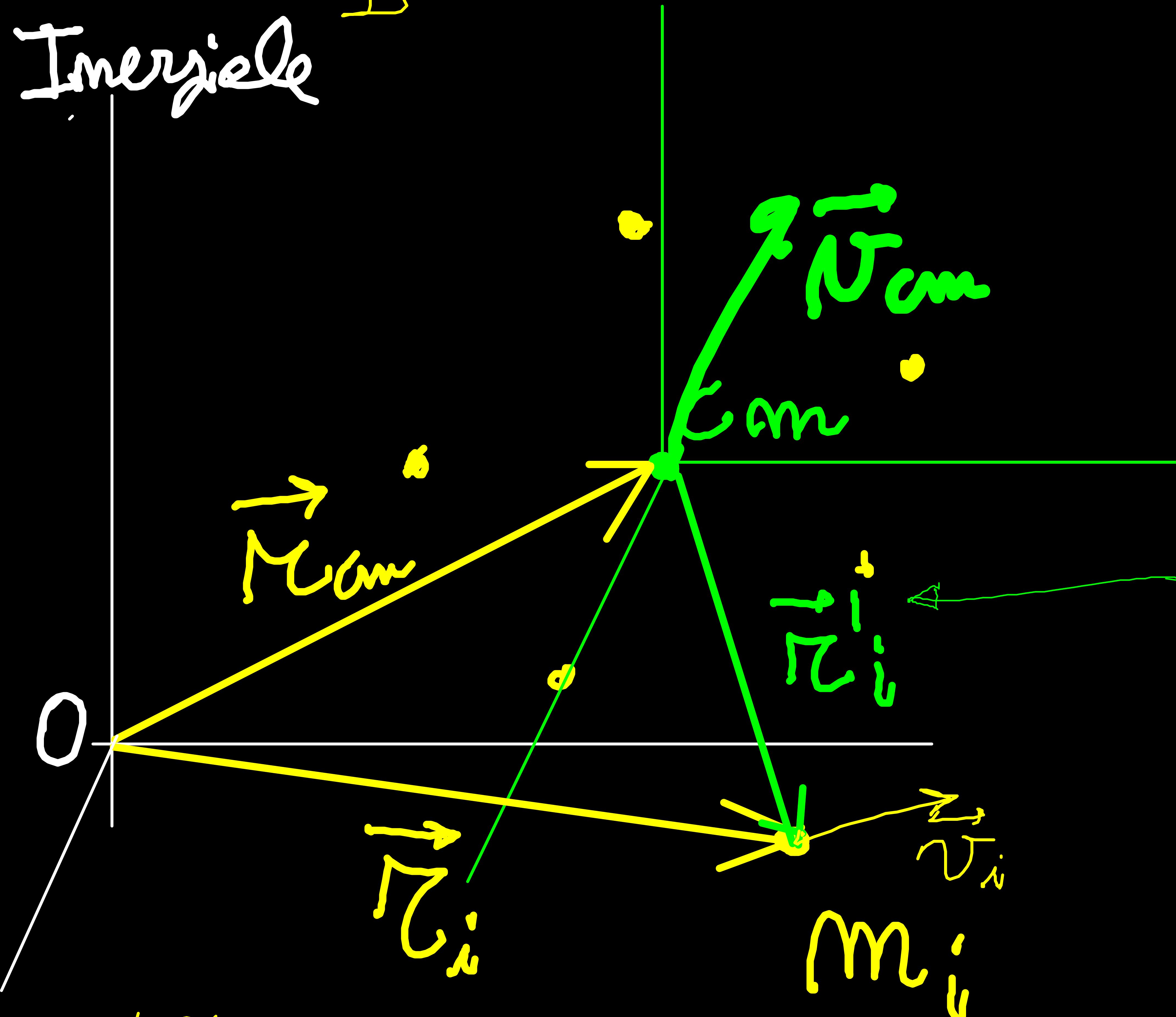
$$\vec{L} = \sum \left(\vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}\right)$$

$$= \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{cm}}_{\underbrace{\left(\sum m_i \vec{r}_i'\right)}_{=0} \times \vec{v}_{cm}} +$$

$$+ \underbrace{\sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{r}_{cm} \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{=0}} + \underbrace{\sum \vec{r}_{cm} \times m_i \vec{v}_{cm}}_{\vec{r}_{cm} \times \left(\sum m_i\right) \vec{v}_{cm}}$$

$$\vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm}$$

1° teorema di K. mom. ang.



nel s.i. prendo O come polo

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum (\vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm})$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{cm}$$

2° teor. di König x en. cin.

nel sist. cm. $K = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{cm}\right)^2 \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{cm}$$

$$= \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^{\,2}}_{K'} + \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2} m_i\right)}_{m} v_{cm}^2 + \underbrace{\underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}_i^{\,\prime}\right)}_{\vec{P}' = 0} \cdot \vec{v}_{cm}}_{=0}$$

$$K' + K_{cm}$$