- Momento angolare

- Teorema " "

Riferimenti

- Mazzoldi - 6.4 e 6.5

- Gettys 13 ....

Def. momento angolare

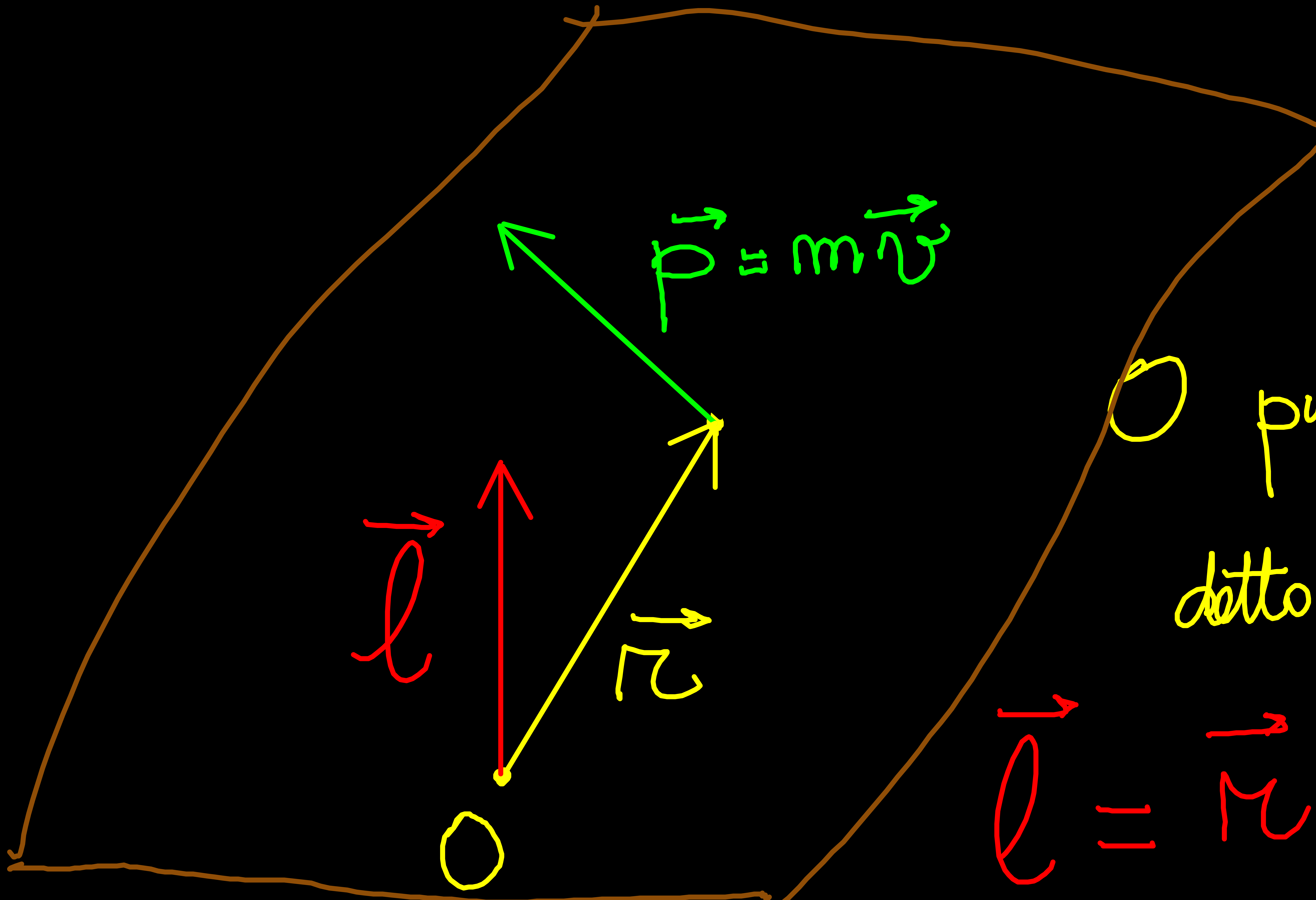
un solo corpo puntiforme

× traslazioni $\qquad \vec{p} = m\vec{v}$

linear momentum

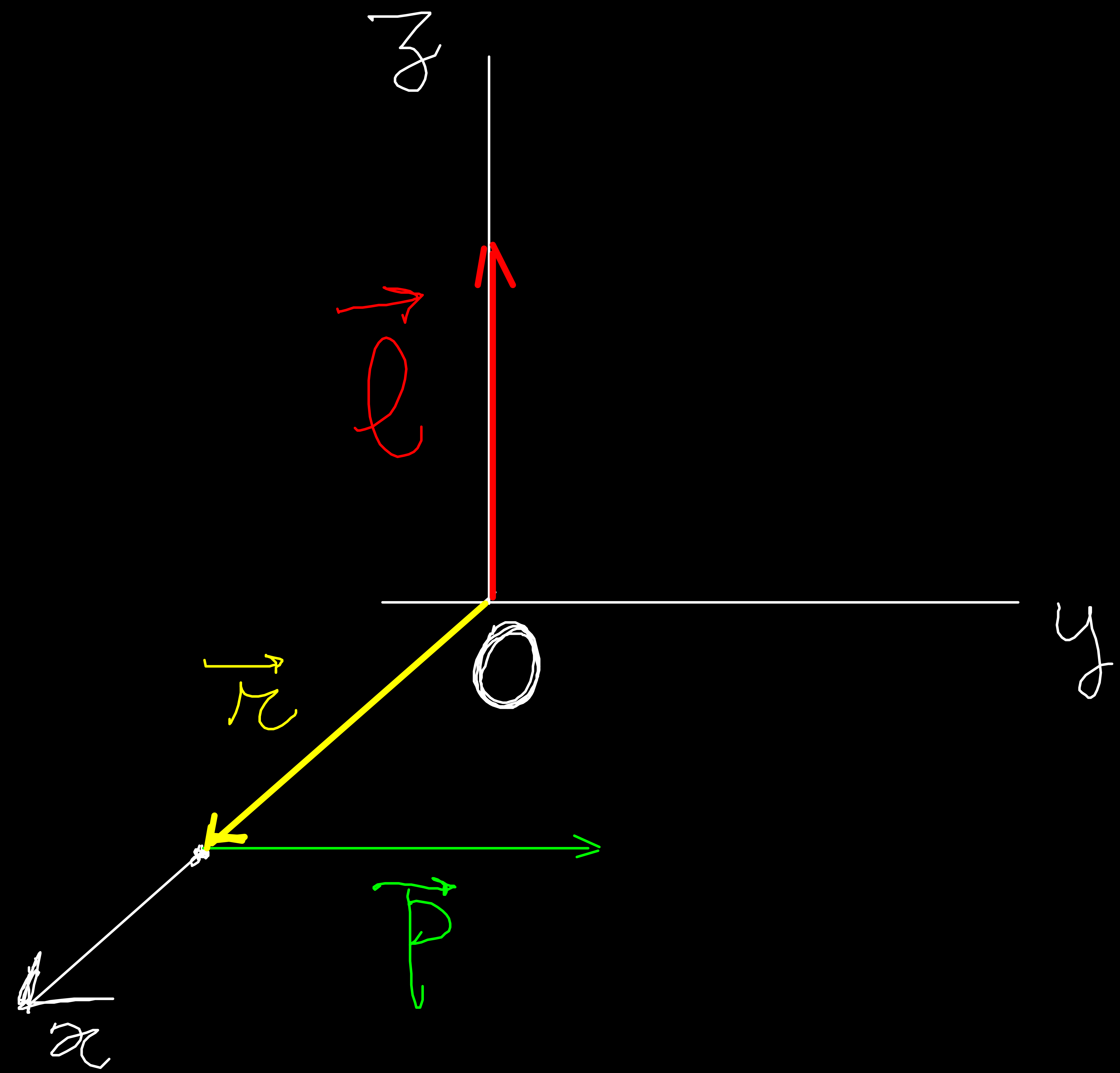
× rotazioni $\qquad$ momento angolare

angular momentum




O punto di riferimento detto "polo"

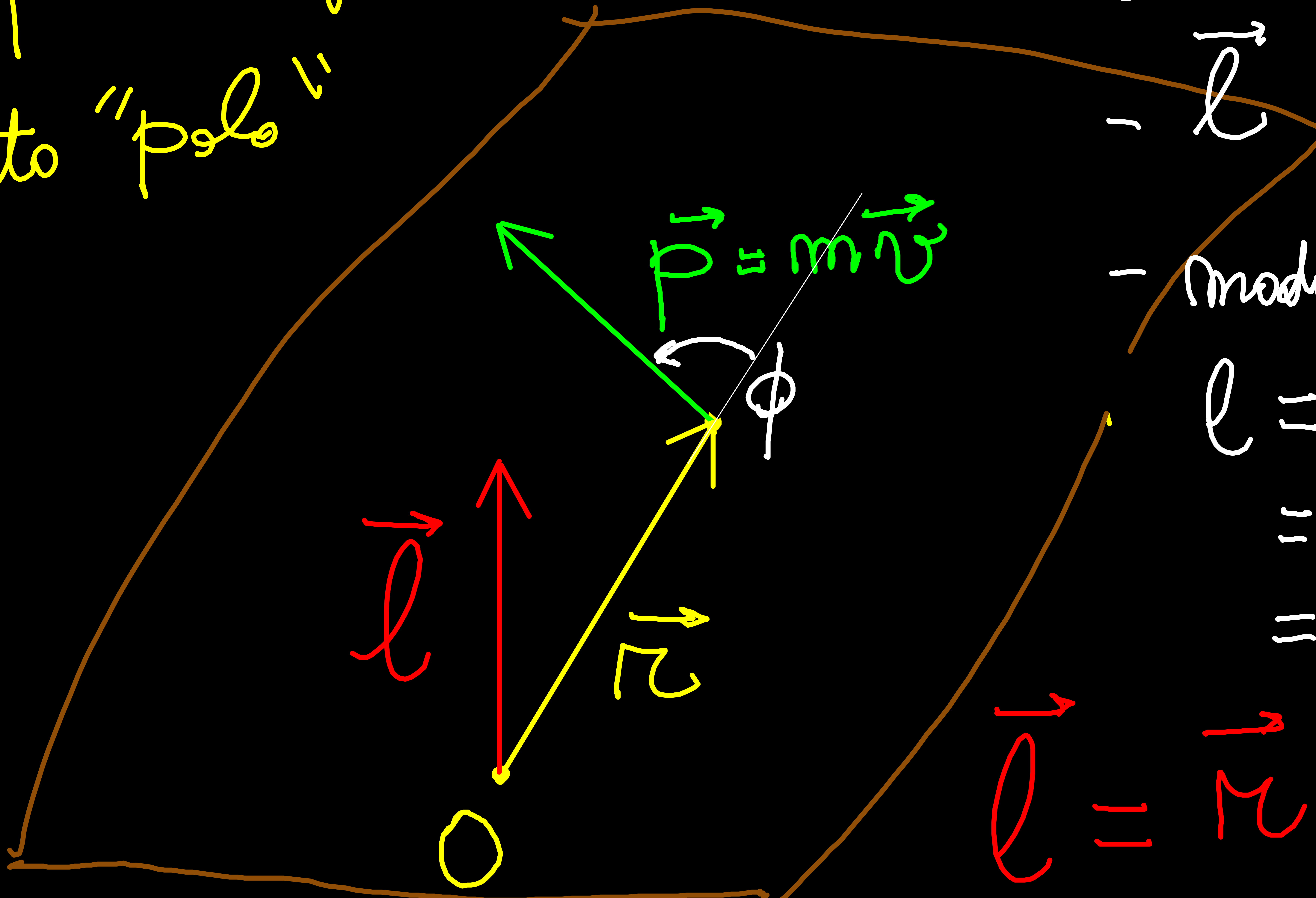
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



z
$\vec{l}$
y
O
$\vec{r}$
$\vec{p}$
x

O punto di riferimento

detto "polo"




Osserv.

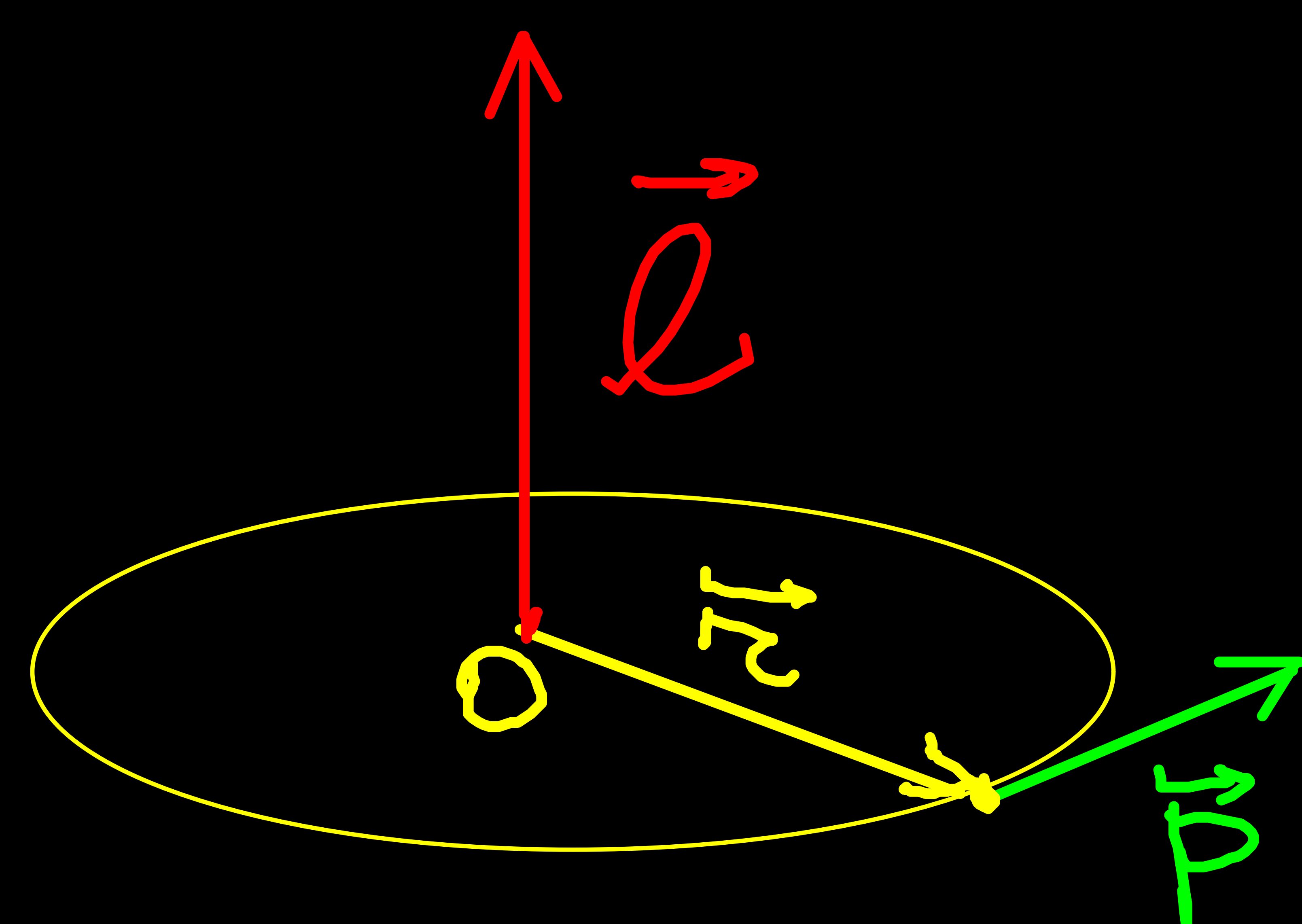
- $\vec{l} \perp$ piano $\vec{r}$ e $\vec{p}$
- modulo $\vec{l}$

$$l = r\,p\,|\sin\phi| = r_\perp\, p = r\, p_\perp$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Esempio $\vec{r}$ e $\vec{p}$ $\perp$ fra loro

punto materiale su traiett. circolare $R$



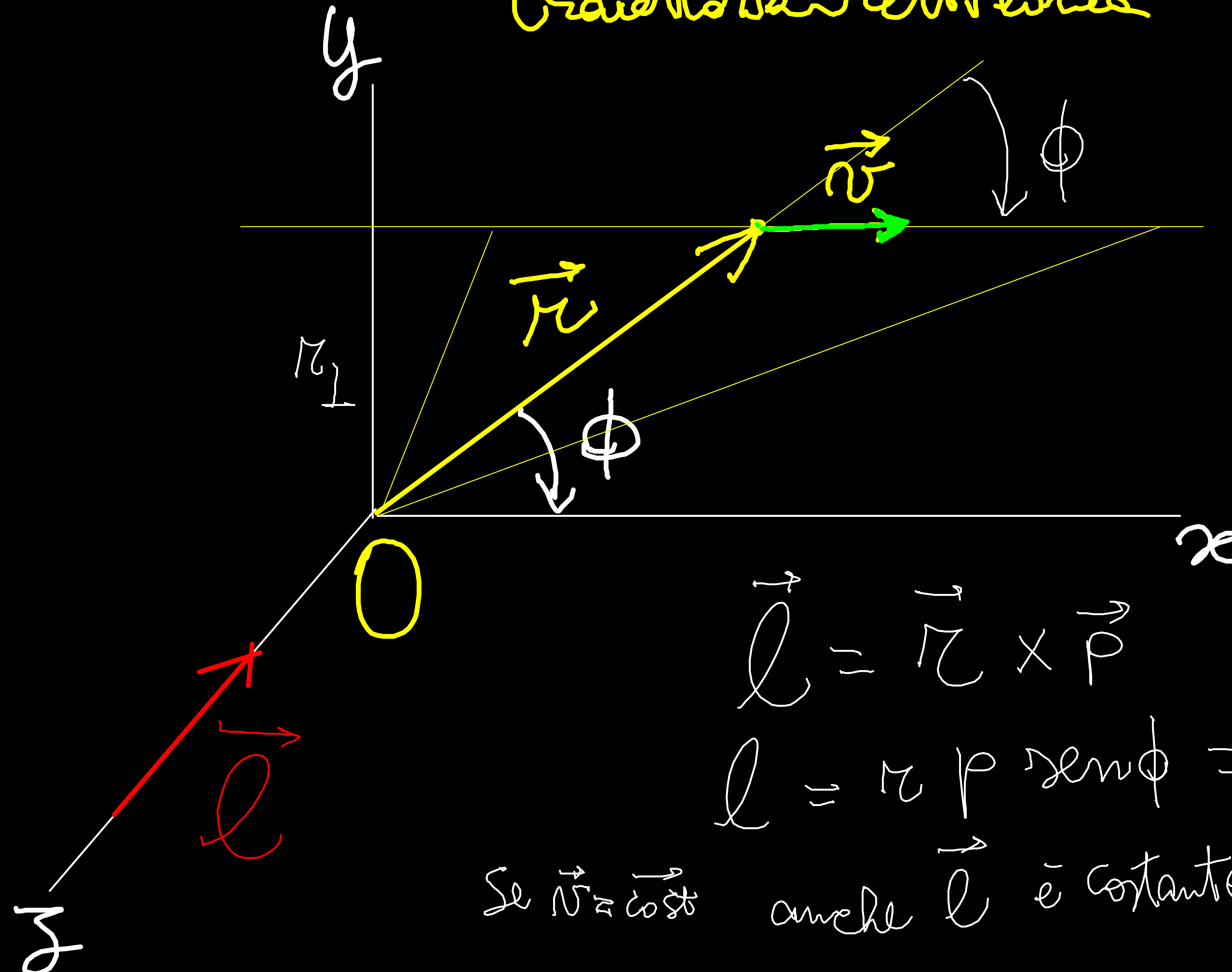

$$\vec{r} \perp \vec{p}$$

$$\ell = R m v$$

$$v = \omega R$$

$$\ell = m R^2 \omega$$

# traiettoria rettilinea




$$\vec l = \vec r \times \vec p$$

$$l = r\, p \,\mathrm{sen}\,\phi = m v r_\perp$$

Se $\vec v = \text{cost}$ anche $\vec l$ è costante

Che relazione c'è fra $\vec{l}$

e $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ?

momento angolare e

momento delle forze ?

Ipotesi <u>sist.</u> rif. <u>inerziale</u>

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{forza risultante applicata } \sum \vec{F}}$$

se il polo O è fisso

$$\underbrace{\vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum\left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right) = \sum \vec{\tau}}_{\vec{\tau} \text{ momento risultante forze applicate}}$$

Teorema del mom. angolare

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}}$$

vale per corpo puntiforme

- sist. inerziale
- se entrambi i momenti calcolati rispetto allo stesso polo O FISSO

analogia con $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$

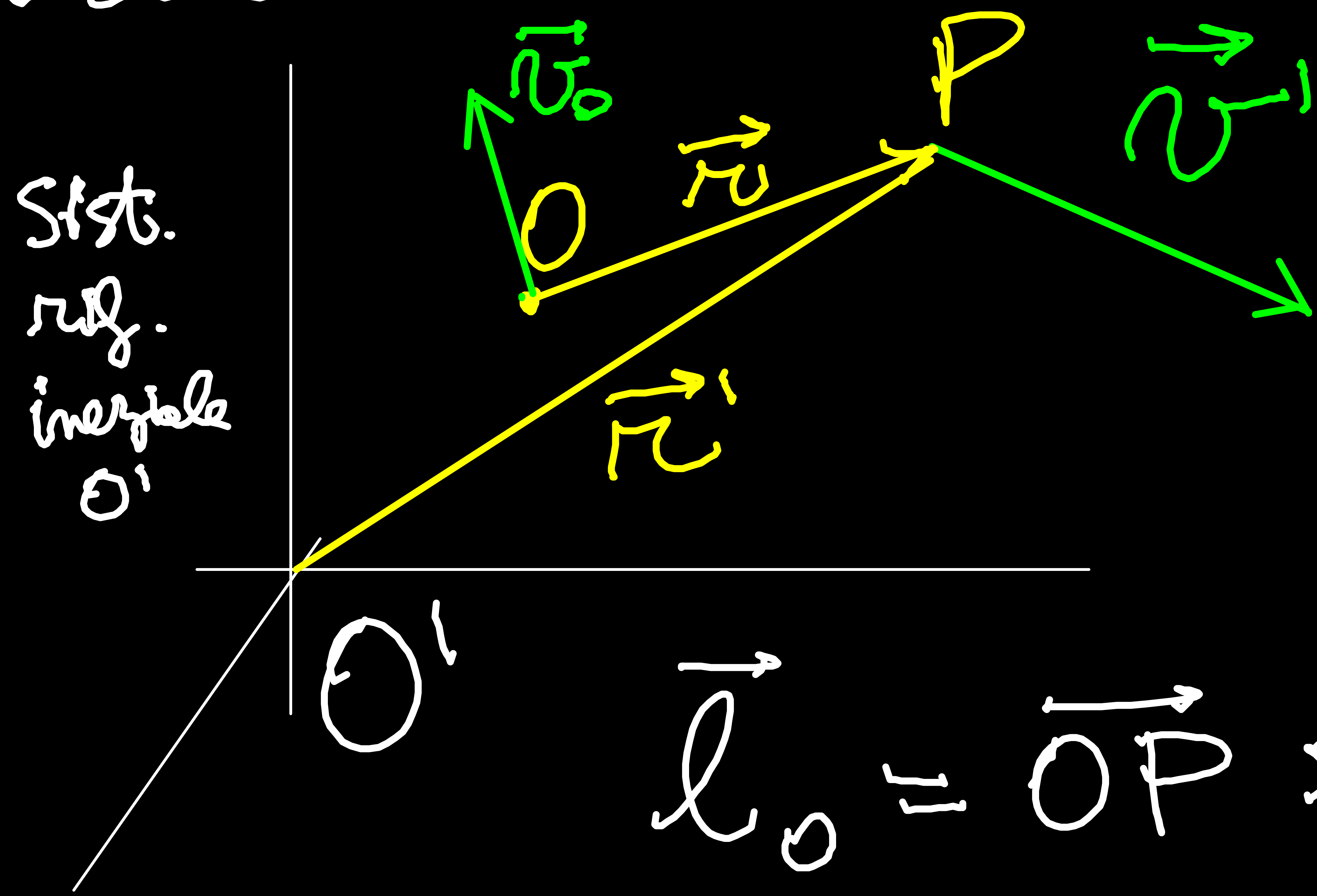
- Quando si conserva $\vec{l}$ ? $\xrightarrow{\times} \vec{\tau} = 0$

Se $\sum \vec{F} = 0$ o se $\sum \vec{F} \parallel \vec{r}$

- Come faccio variare $\vec{l}$ $\qquad \Delta \vec{l} = \vec{l}_{fin} - \vec{l}_{in}$

$\vec{\tau}\, dt = d\vec{l} \qquad \int_0^t \vec{\tau}\, dt = \int d\vec{l} = \Delta \vec{l}$

e se O si muove?




$$\vec p = m\vec v'$$

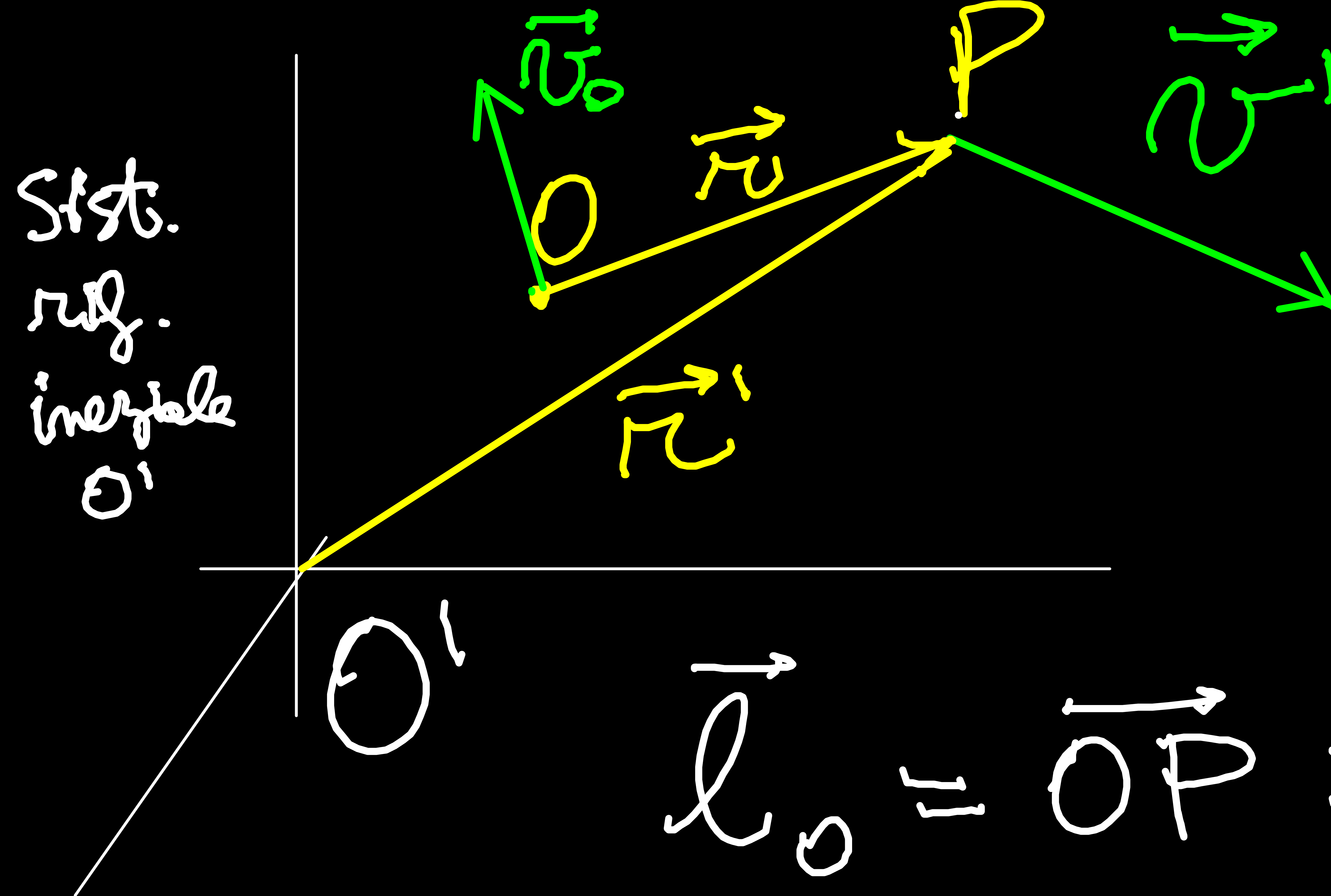
$$\vec l_0 = \vec r \times \vec p$$

$$\vec l_0 = \vec{OP} \times \vec p = \Big(\underbrace{\vec{OO'}}_{\substack{-\vec{O'O} \\ -\vec r'_0}} + \underbrace{\vec{O'P}}_{\vec r'}\Big) \times \vec p$$

posizione di O rispetto O'

posizione P risp. O'

e se O si muove?




$\vec{p} = m\vec{v}'$

$\vec{l}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{l}_0 = \vec{OP} \times \vec{p} = (\vec{OO'} + \vec{O'P}) \times \vec{p}$$

$$= (\vec{r}' - \vec{r}'_0) \times \vec{p}$$

$$\vec{l}_o = \vec{OP} \times \vec{P} = \left(\vec{OO'} + \vec{O'P}\right) \times \vec{p}$$

$$= \left(\vec{r}' - \vec{r}'_o\right) \times \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{r}' - \vec{r}'_o\right)\right] \times \vec{p} + \underbrace{\left(\vec{r}' - \vec{r}'_o\right)}_{\vec{OP} = \vec{r}} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\Sigma \vec{F}}$$

$$= \left[\vec{v}' - \frac{d\vec{r}'_o}{dt}\right] \times \vec{p} + \vec{r} \times \Sigma \vec{F}$$

$$= 0 - \vec{v}_o \times p + \vec{\tau}_0$$

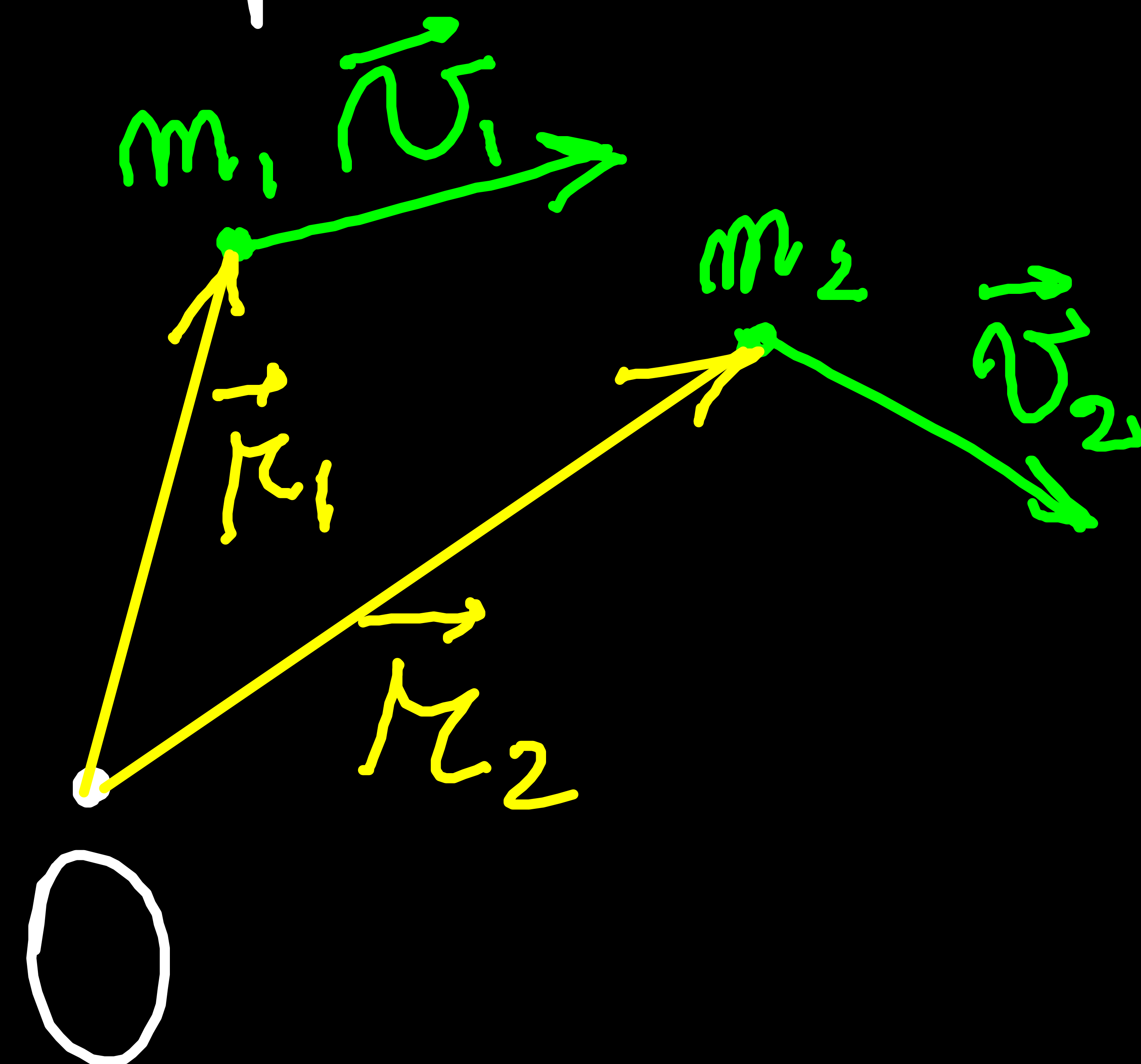
$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 - \vec{v}_0 \times \vec{P}$$

velocità del polo mobile O

- Se O è fisso risp. sist rif. $\vec{v}_0 = 0$
  risultato precedente
- Se O mobile $\longrightarrow$ devo stare attento

a meno che prendo cond part. o scelta $O \equiv cm$

par. 6.4




Teorema momento angolare per sistemi di punti materiali:

- Mi metto in un sist. rif. inerziale s.r.i
- Scelgo un polo O che in generale non coincide con l'origine s.r.i. e che può muoversi

momento angolare totale

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i$$

$$= \sum \left( \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{L} = \sum\left(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right)\right]$$

uso

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i\right] =$$

$$= \sum\left[(\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i\vec{v}_i\right] + \sum\left[\vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d\, m_i\vec{v}_i}{dt}}_{\underbrace{m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\sum \vec{F}_j = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}}}\right]$$

$$= \underbrace{\sum \underbrace{\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i}_{0}}_{0} - \vec{v}_0 \times \sum m_i\vec{v}_i + \dots$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{L} = \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right)\right]$$

uso

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right] =$$

$$= \sum \left[\left(\vec{v}_i - \vec{v}_0\right) \times m_i \vec{v}_i\right] + \sum \left[\vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i}\right]$$

$$= \underbrace{\sum \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{0}}_{0} - \vec{v}_0 \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i}_{m\vec{v}_{CM}} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}}_{\vec{M}^{(I)}} + \underbrace{\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}}_{\vec{M}^{(E)}}$$

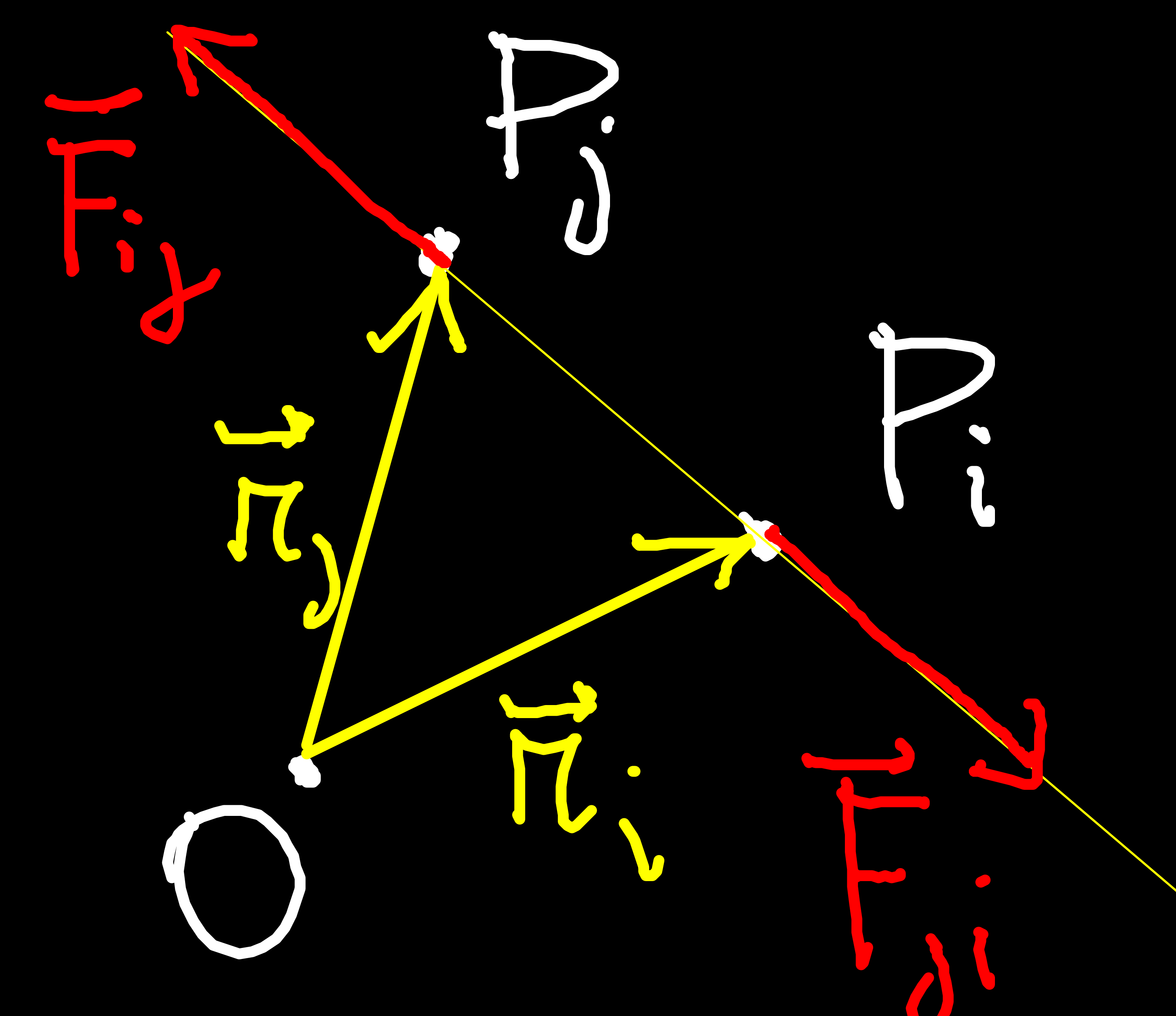
$$\frac{d}{dt}\left\{ \vec{L} = \sum \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right) \right\}$$

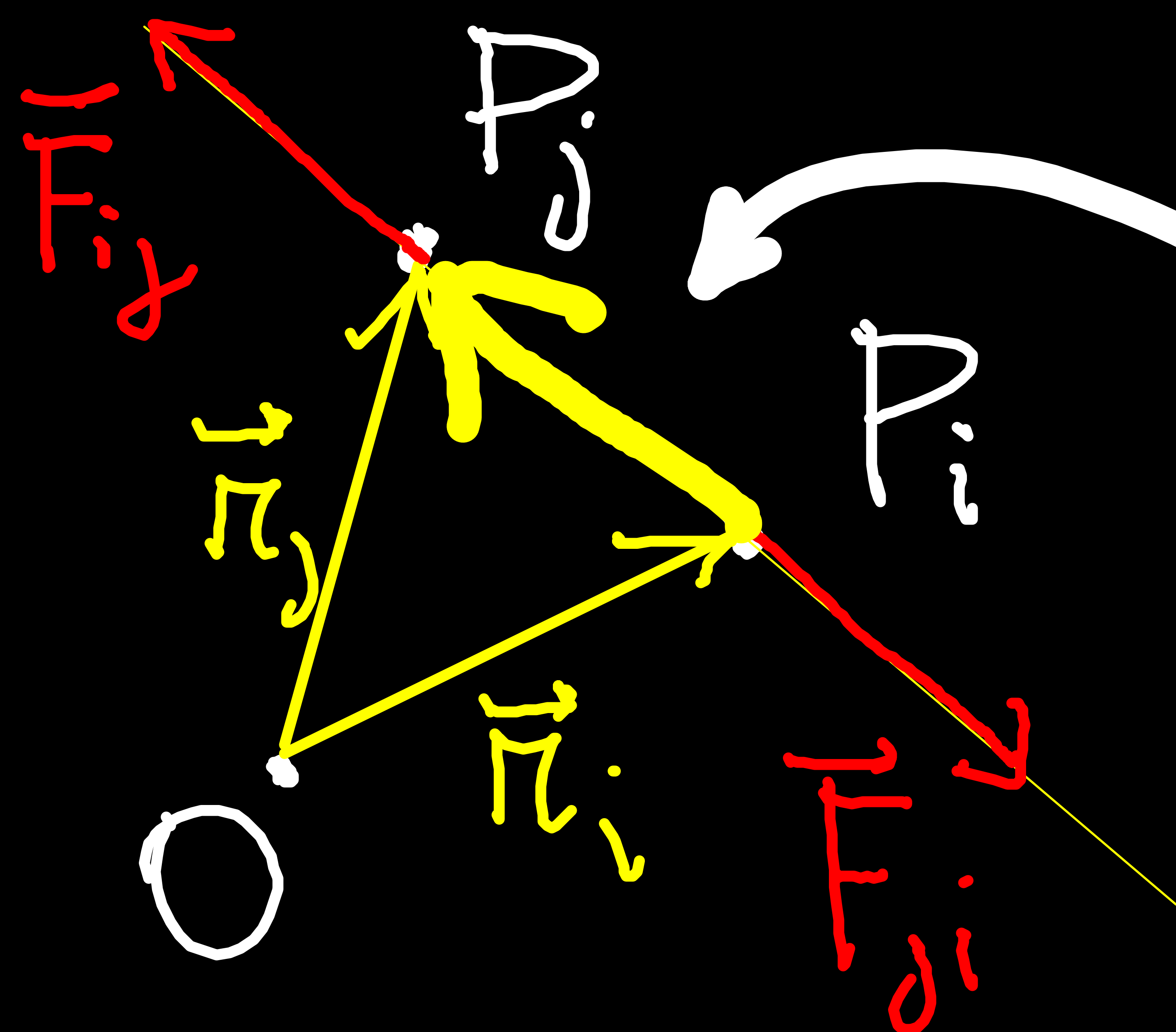
uso $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_0 \times m \vec{v}_{cm} + \vec{M}^{(I)} + \vec{M}^{(E)}$$

Per $\vec{M}^{(I)} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}$

posso prenderle a due a due i e j






$$\vec M^{(I)}_{ij} = \vec r_j \times \vec F_{ij} + \vec r_i \times \underbrace{\vec F_{ji}}_{-\vec F_{ij}}$$

$$= \underbrace{(\vec r_j - \vec r_j)}_{\parallel} \times \vec F_{ij}$$

$$\forall ij \quad \vec M_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \vec M^{(I)} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)} - \underbrace{\vec{v}_0 \times m\vec{v}_{cm}}$$