$$\Delta K = W_{tot}$$

$$K_f - K_i = \underbrace{W_{cons}}_{-(U_f - U_i)} + W_{non}$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i + W_{non}$$

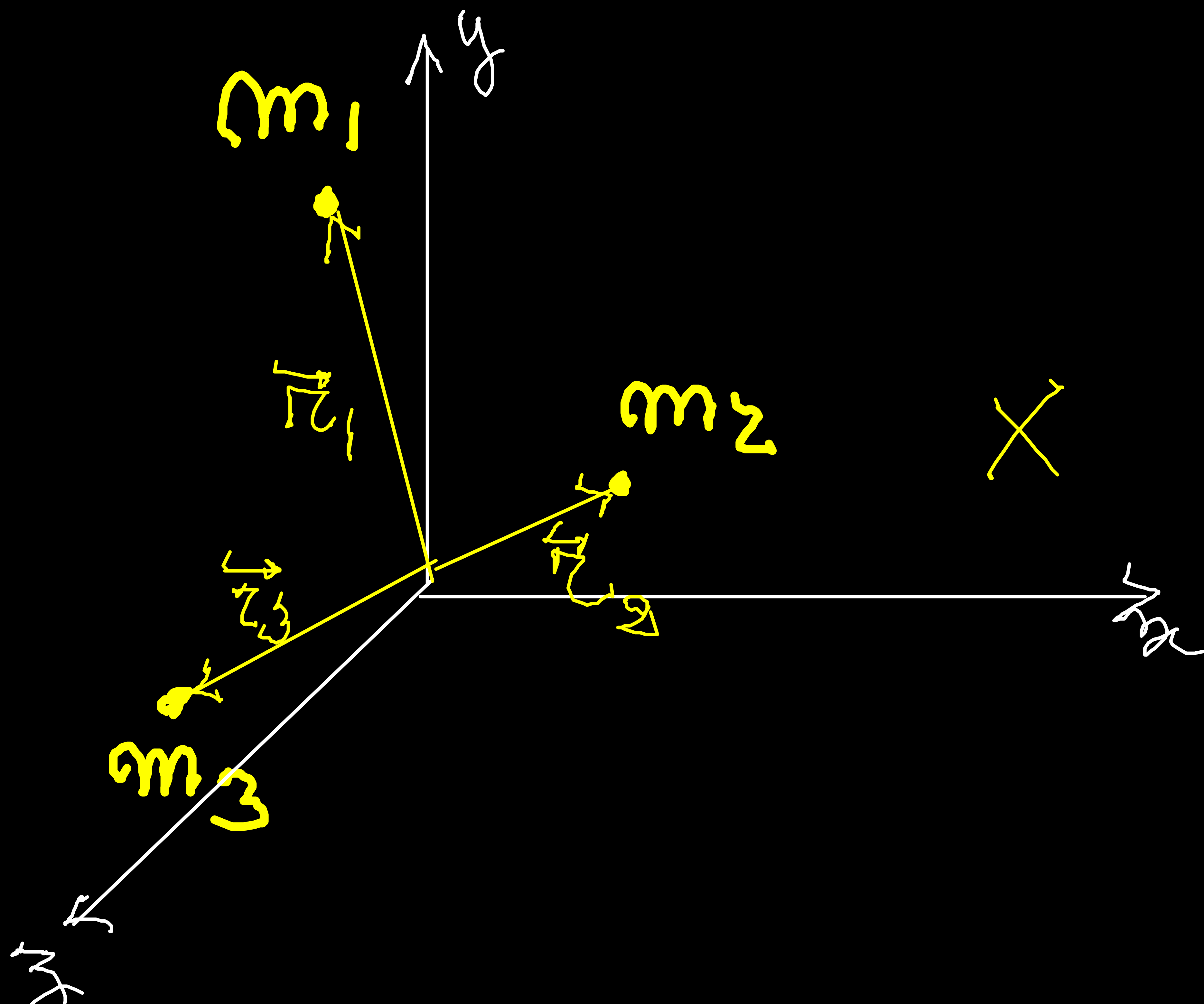
$$\begin{cases} E_f = E_i + W_{non} \\ \Delta E = W_{non} \end{cases}$$

Teor. en. cinetica modificato

Moto dei sistemi

cap. 10 Gettys
cap. 6 Mazzoldi

Cercasi <u>punto</u> rappresentativo
sistema di punti materiali o corpo esteso



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\underbrace{\sum m_i}_{M}}$$

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_{cm} = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_{cm} = \dfrac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

Osserv.

1) la posizione non dipende dal sist. di rif.
   le sue coord. sì

2) Se non specifico i valori delle m_i

Es. 10.1

$m_1 = 3g \qquad \bar{r}_1 = (11, 8, 0)\ mm$

$m_2 = 4g \qquad \bar{r}_2 = (-8, 2, 0)\ mm$

$m_3 = 5g \qquad \bar{r}_3 = (10, -3, 0)\ mm$

$$x_{cm} = \frac{(3g)(11\ mm) + (4g)(-8\ mm) + (5g)(10\ mm)}{(3+4+5)g} \approx 4\ mm$$

$$y_{cm} = 2\ mm$$

$$z_{cm} = 0\ mm$$

Es. 10.1

$m_1 = 3g \qquad \bar{r}_1 = (11, 8, 0)\ mm$

$m_2 = \cancel{4g}\ 40g \qquad \bar{r}_2 = (-8, 2, 0)\ mm$

$m_3 = 5g \qquad \bar{r}_3 = (10, -3, 0)\ mm$

$$x_{cm} = \frac{(3g)(11\ mm) + (\overset{40}{\cancel{4g}})(-8\ mm) + (5g)(10\ mm)}{(3 + \overset{40}{\cancel{4}} + 5)g} \approx \cancel{4\ mm}\ -5\ mm$$

$y_{cm} = \underline{2\ mm}$

$z_{cm} = 0\ mm$

Se ho un sistema continuo, corpo esteso

$$\sum \longrightarrow \int$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\underbrace{\int dm}_{M}}$$

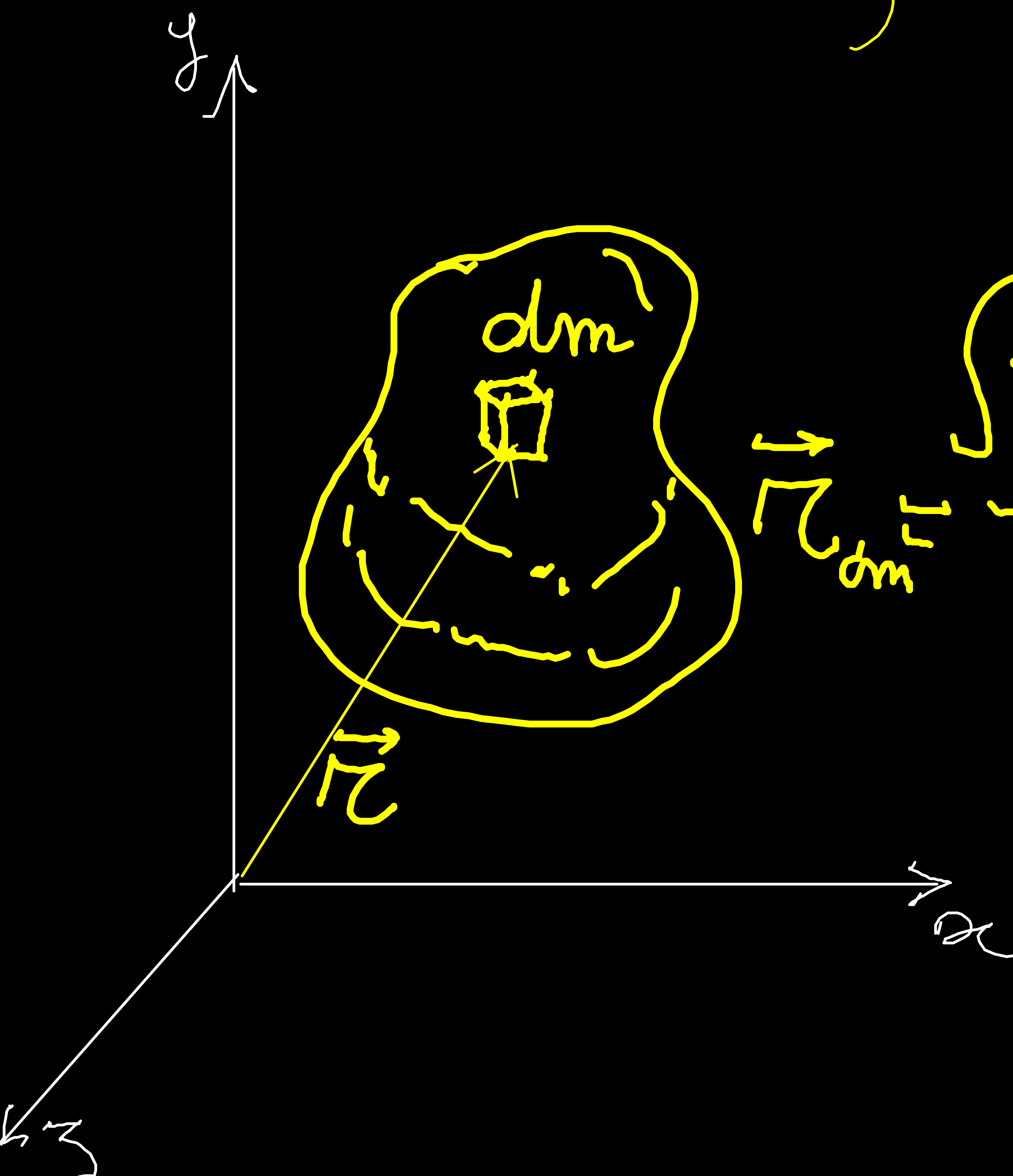
$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int x\, dm \\ y_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y\, dm \\ z_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int z\, dm \end{cases}$$

Come procedo nei conti?

$dm = \rho \, dV$ $\qquad$ ρ densità di massa

$\rho =$ cost nel volume per corpi omogenei

ρ in generale $\rho(\vec{r})$



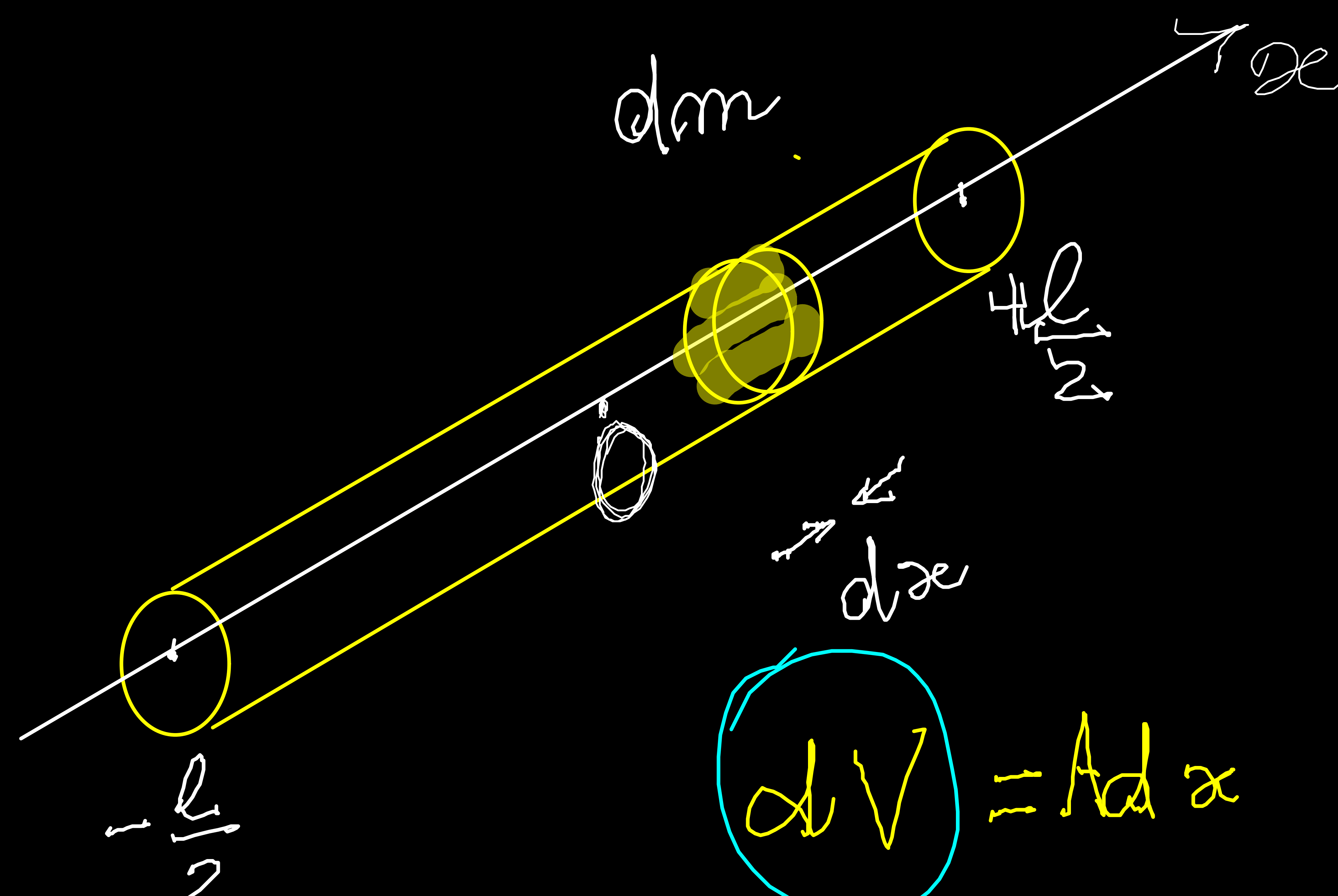
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\underbrace{\int dm}_{M}} = \frac{\int_{V_{corpo}} \vec{r} \rho \, dV}{M}$$

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_V x \rho \, dV \\ y_{cm} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_V y \rho \, dV \\ z_{cm} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_V z \rho \, dV \end{cases}$$

Esempio 10.2

bacchetta sottile omogenea

l, A, M, ρ cost



$dV = A\,dx$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_i x \rho \, dV$$

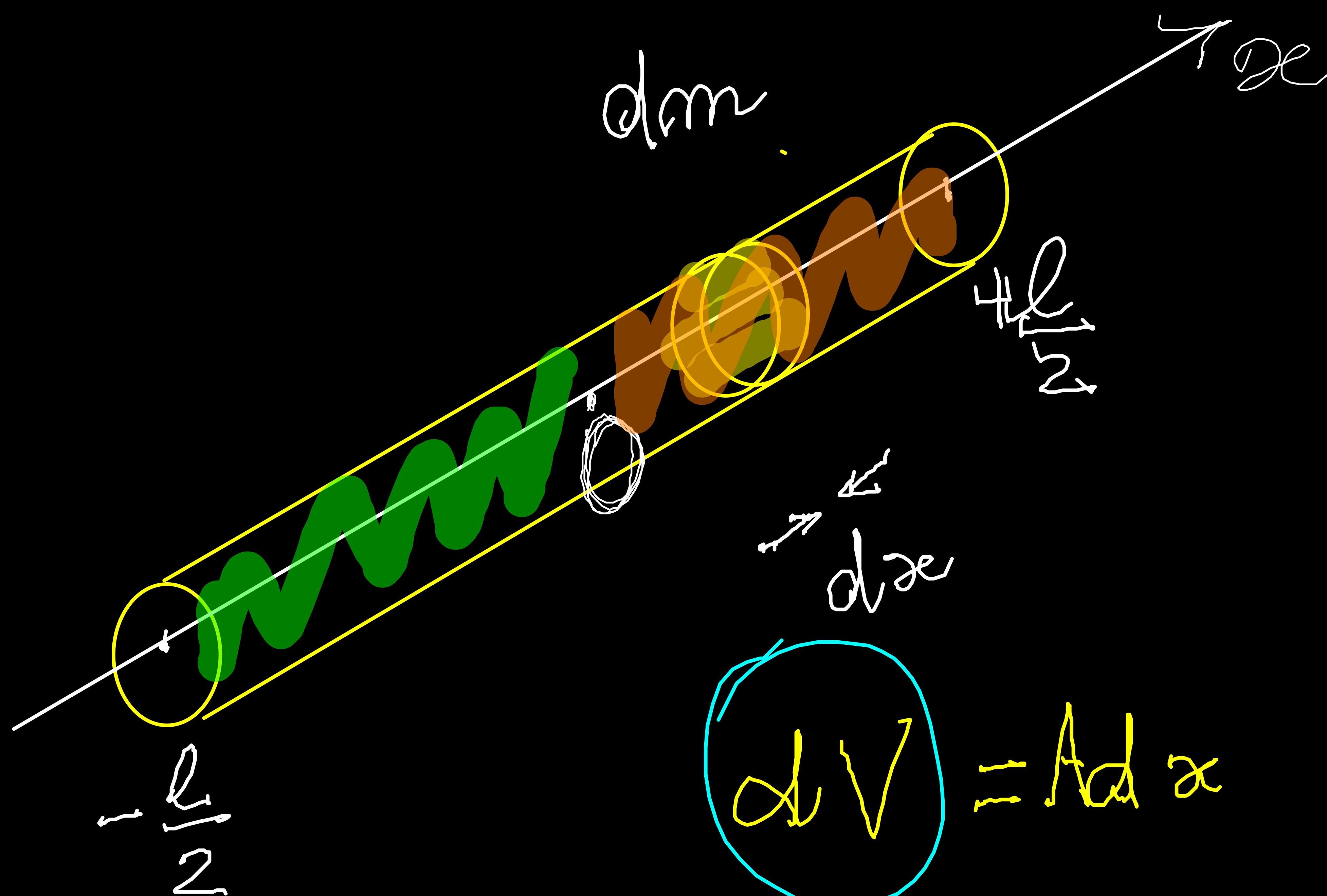
$$\rho = \frac{dm}{dV} \underset{\text{omogeneo}}{=} \frac{M}{V} = \frac{M}{lA}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x \frac{\cancel{M}}{l\cancel{A}} \cancel{A}\, dx$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x \, dx = 0$$

Variante non omogenea: due materiali

$l/2 \quad \rho_1 \quad ; \quad \frac{l}{2} \quad \rho_2$



$$dV = A\,dx$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\rho\, dV = \frac{1}{M}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x\rho A\, dx$$

$$= \frac{A}{M}\left[\int_{-\frac{l}{2}}^{0} x\rho_1\, dx + \int_{0}^{\frac{l}{2}} x\rho_2\, dx\right]$$

$$\rho_1\left(-\frac{l^2}{4}\right) + \rho_2\left(\frac{l^2}{4}\right)$$

$$= \frac{Al^2}{4M}(\rho_2 - \rho_1)$$

Osservazioni

1) attenzione $\underbrace{\int x \rho \, dV}_{\substack{y \\ z}}$

Sono integrali di volume.

3 integrazioni

$dV = dx\,dy\,dz$ $\quad \underbrace{\iiint}_{\text{in}} x \rho \, \underbrace{dx\,dy\,dz}_{A}$

2) Continuo $\longrightarrow$ Σ discreta

3) $\rho(x, y, z)$ nei casi continui complicati

Moto del centro di massa

oggetto esteso → moto complicato

il suo c. m. → moto parabolico

semplice (come quello di un corpo puntiforme)

dipende solo delle forze esterne

al sistema.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{cm}) = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

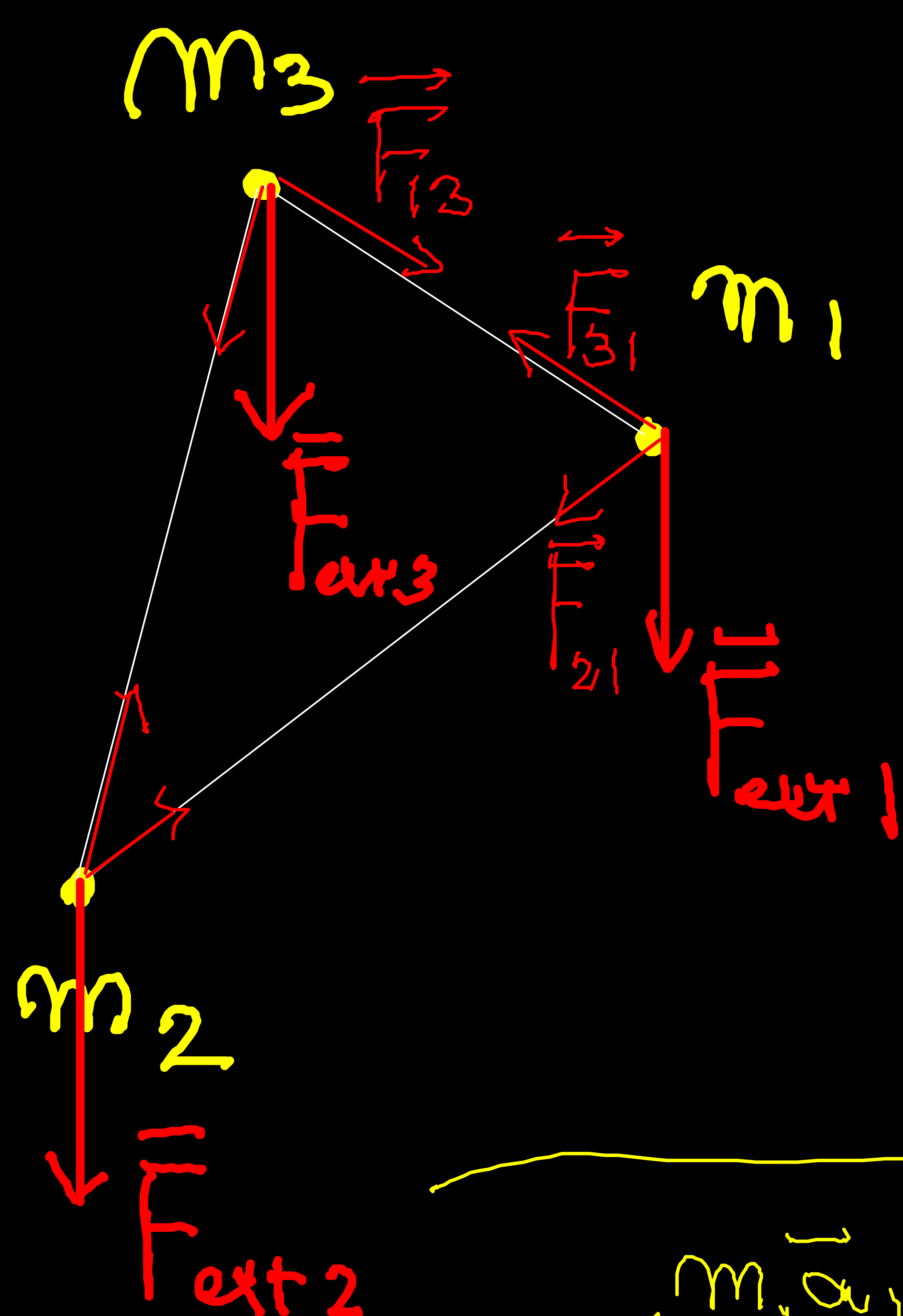
$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$$

dimostriamo che moto c.m. dipende

<u>solo</u> forze esterne al sist



Forze interne $\vec{F}_{ij}$ forza che i esercita su j

1) Siamo in un sist. inerziale

2) Uso 3 principio di Newton

$$m_1\vec{a}_1 = \sum \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{ext\,1}$$

$$m_2\vec{a}_2 = \sum \vec{F}_2 =$$

$$m_3\vec{a}_3 = \sum \vec{F}_3 =$$

$$\underbrace{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}_{M\vec{a}_{cm}} = \underbrace{(\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12})}_{=0} + \underbrace{(\vec{F}_{31}+\vec{F}_{13})}_{=0} + \underbrace{(\vec{F}_{32}+\vec{F}_{23})}_{=0} + \vec{F}_{ex}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$$

le forze interne contribuiscono a determinare il moto dei singoli punti

$$m_i \bar{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

Veicolo spaziale

$\longrightarrow$ senza forze esterne

traiettoria c.m.

$$\vec{F}_{ext} = 0 \implies \bar{a}_{cm} = 0$$

$$\vec{v}_{cm} = \text{cost}$$

moto
rett.
unif.

Quantità di moto

Gr. fisica vett. $\quad m \quad \vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \mathrm{Kg\ m/s}$$

perché?

semplifico Newton $\quad \sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Generalizzazione

Sistema di corpi

$$\vec{P} = \sum \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\sum \vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}_i\right)}_{M\vec{v}_{cm}} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

10.5
6.3

Conservazione quantità di moto

per un singolo corpo puntiforme 1° principio

se $\sum \vec{F} = 0$ $\vec{v} = cost$, $\vec{p} = cost$

per un sistema di corpi puntiformi

$$\text{se} \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

la quantità di moto totale $\boxed{\vec{P} \text{ è costante}}$

si conserva (nel tempo)

Legge di cons. della q.m. di un sistema

Quando la risultante delle forze esterne agenti su un sistema è nulla, la q.m. totale del sistema si conserva.

NOTA: 2ª legge importante di Cons. en. mecc.
Ipotesi diverse
Scalare

Se $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \vec{P} = cost$

1) $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ ad es. nei sistemi isolati perché $\vec{F}_{ext} = 0$

2) $\vec{P} = cost \Longrightarrow \vec{v}_{cm} = cost \quad \vec{a}_{cm} = 0$

moto rett. unif. del CM

3) $\vec{P} = cost$ è una legge vettoriale

3 eq. o cond. anche per le 3 comp. cart.

$$\begin{cases} P_x = cost1 \\ P_y = cost2 \\ P_z = cost3 \end{cases}$$

4) la cons. può avvenire anche solo in 1 o 2 direzioni

compon. cost

Es. se $\sum F_{ext,x} = 0 \Rightarrow P_x = cost$

se $\sum F_{ext} \neq 0$ solo in una direzione

$\Rightarrow P_{trasv} = cost$

5) Corollario:

2 punti isolati $\qquad \vec{P}$ si conserva

$\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{P}$ cost.

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0$$

$$= \underbrace{m\,\vec{a}_1}_{\vec{F}_{21}} + \underbrace{m\,\vec{a}_2}_{\vec{F}_{12}} \Rightarrow \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

manca ancora allineamento, ma eq. 3° princ.